

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 4.
Module : *Analyse 4* - Examen de Rattrapage.
Dimanche 27/06/2021 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (06pts) On définit la fonction f par

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ b & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

1. Quelle valeur peut-on donner à b pour assurer la continuité de f au point $(0, 0, 0)$?
2. Étudier la différentiabilité de f au point $(0, 0, 0)$.

Exercice 2 : (07pts) On considère la fonction

$$F(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

1. Déterminer les points critiques de F .
2. Étudier la nature de chaque point critique non dégénéré (minimum, maximum, point selle).

Exercice 3 : (07pts) Soit a un paramètre réel tel que $0 < a < 1$. On définit une fonction g_β sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$g_\beta(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^\beta}$$

où β est un paramètre réel.

1. Calculer $I_\beta = \iint_D |g_\beta(x, y)| \, dx dy$ où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

2. Comment faut-il choisir β de façon à ce que $\lim_{a \rightarrow 0+} I_\beta$ existe ?

2^{ème} année de Licence de Mathématiques - S4 - 2020/2021.

Module: "Analyse 4" - Rattrapage - Corrigé

Exercice 1: (06pts) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ b & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

1^o Valeur de b? La continuité en $(0,0,0)$ s'exprime par

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z) = f(0,0,0) = b.$$

Donc il suffit de déterminer cette limite, pour fixer la valeur de b. On a:

$$\frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{|xyz|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}|z| \text{ car } \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}.$$

(On aurait pu aussi majorer $\frac{|xz|}{x^2+z^2}$ ou bien $\frac{|yz|}{y^2+z^2}$). Donc

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} |f(x,y,z)| \leq \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2}|z| = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z) = 0.$$

Ainsi la valeur de b qui assure la continuité est $\boxed{b=0}$.

2^o Différentiabilité en $(0,0,0)$: On a:

$$\frac{f(x,0,0) - f(0,0,0)}{x} = \frac{0-0}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0,0) - f(0,0,0)}{x} = 0$$

$$\text{càd } \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = 0}. \text{ De la même façon } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0).$$

Nous avons donc un candidat à la différentielle

$$\text{en } (0,0,0) \text{ qui est } \boxed{df_{(0,0,0)}(h_1, h_2, h_3) = 0}$$

1

Vérifions si ce candidat est "bon". On forme

$$R(h_1, h_2, h_3) = \frac{f(h_1, h_2, h_3) - f(0,0,0) - df_{(0,0,0)}(h_1, h_2, h_3)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$$

$$= \frac{f(h_1, h_2, h_3)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} = \frac{h_1 h_2 h_3}{(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)^{3/2}}$$

On regarde si $\lim_{(h_1, h_2, h_3) \rightarrow (0,0,0)} R(h_1, h_2, h_3)$ a des chances d'être 0?

Prendons par exemple la suite $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Alors

$$R(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1/n^3}{(3/n^2)^{3/2}} = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n^3}{3^{3/2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} R(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \neq 0$.

Ainsi $\lim_{(h_1, h_2, h_3) \rightarrow (0,0,0)} R(h_1, h_2, h_3) \neq 0$ (d'ailleurs n'existe pas)

et donc f n'est pas différentiable en $(0,0,0)$.

Exercice 2: (07pts) $F(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

1° Points critiques de F : Les points critiques sont les solutions du système suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 & (1) \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

Par addition de (1) et (2) on obtient:

$$4(x^3 + y^3) = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$$

* Examinons d'abord l'équation $x^2 - xy + y^2 = 0$.

Elle a une solution évidente $(0,0)$ ($x=0$ et $y=0$).

Supposons par exemple $y \neq 0$, et divisons par y^2 :

$$\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} + 1 = 0. \text{ Posons } t = x/y.$$

t est alors solution de l'équation $t^2 - t + 1 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0$. La dernière équation n'a aucune solution réelle et donc l'éq.

$x^2 - xy + y^2 = 0$ n'a aucune solution avec $y \neq 0$.

En définitive: $x^2 - xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.

* Pour l'autre terme $x+y=0 \Leftrightarrow \boxed{y=-x}$ (une infinité de solutions).

Revenons au système des points critiques. Il y a une solution évidente $(0,0)$. Remplaçons après y par $-x$ dans l'une des deux équations (1) ou (2):

$$4x^3 - 4x - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{2}.$$

En définitive, les points critiques sont:

$$\boxed{\bigcirc (0,0) ; A(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ et } B(\sqrt{2}, \sqrt{2})}$$

2°/ Nature des points critiques: Calculons la Hessienne:

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

$$* H_O = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \det H_O = 16 - 16 = 0$$

Donc le point critique $O(0,0)$ est dégénéré.

$$* H_A = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}, \text{tr}(H_A) = 40 = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$$

$$\det(H_A) = 400 - 16 = 384 = \lambda_1 \lambda_2 > 0$$

Donc les deux valeurs propres sont strictement positives.
Ainsi A n'est pas dégénéré et c'est un minimum.

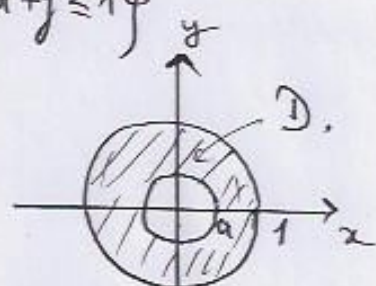
$$* H_B = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}, B \text{ est aussi non-dégénéré et c'est un } \underline{\text{minimum}}.$$

Exercice 3; (07pts) $g_\beta(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^\beta}, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$

1°/ Calcul de I_β : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$

Utilisons les coordonnées polaires:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & a \leq r \leq 1 \\ y = r \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$



$$\text{Donc } I_\beta = \iint_D \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^\beta} dx dy = \int_a^1 \int_0^{2\pi} \frac{r^2 |\cos 2\theta|}{r^{2\beta}} \cdot r dr d\theta$$

$$I_\beta = \left(\int_a^1 r^{3-2\beta} dr \right) \left(\int_0^{2\pi} |\cos 2\theta| d\theta \right)$$

$$= \left[\frac{r^{4-2\beta}}{4-2\beta} \right]_a^1 \cdot \left\{ \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/4} + \left[-\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{\pi/4}^{3\pi/4} + \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{3\pi/4}^{5\pi/4} + \left[-\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{5\pi/4}^{7\pi/4} + \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{7\pi/4}^{2\pi} \right\}$$

4

l'intégrale $\int_0^{2\pi} |\cos 2\theta| d\theta$, après simplification, vaut

$$4: \int_0^{2\pi} |\cos 2\theta| d\theta = 4. \text{ Pour l'intégrale en } r \text{ on a:}$$

$$\int_a^1 r^{3-2\beta} dr = \begin{cases} \frac{1-a^{4-2\beta}}{4-2\beta} & \text{si } \beta \neq 2 \\ -\ln a & \text{si } \beta = 2. \end{cases}$$

$$\text{Donc } I_\beta = \begin{cases} \frac{4(1-a^{4-2\beta})}{4-2\beta} & \text{si } \beta \neq 2 \\ -4 \ln a & \text{si } \beta = 2. \end{cases}$$

3

2° Choix de β : On veut choisir β tel que $\lim_{a \rightarrow 0^+} I_\beta$ existe.

On voit bien que $\beta = 2$ est un mauvais choix, car $\lim_{a \rightarrow 0^+} (-4 \ln a) = +\infty$. Si $\beta \neq 2$ alors

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} a^{4-2\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } 4-2\beta > 0 \\ +\infty & \text{si } 4-2\beta < 0 \end{cases}$$

Donc le choix approprié de β est

$$4-2\beta > 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta < 2}$$

$$\text{et dans ce cas } \boxed{\lim_{a \rightarrow 0^+} I_\beta = \frac{2}{2-\beta}}$$

3