**Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen**
**Faculté des Sciences**
**Département de Mathématiques**
**Année Universitaire 2020/2021**

**2ème année Mathématiques**
**Semestre 2**

# *Examen Final de Géométrie*

**Durée : 1h30mn**
**31 Mai 2021**

## Exercice 1 (5 pts)

On considère la courbe paramétrée $\alpha$ qui à $t \in \mathbb{R}_+$ associe

$$\alpha(t) = (3(\cos t + t \sin t), 3(\sin t - t \cos t), 2t^2)$$

1. Déterminer les points réguliers de la courbe $\alpha$.
2. Déterminer, en un point régulier de $\alpha$, le repère de Frenet.
3. Trouver la courbure et la torsion de la courbe $\alpha$.

## Exercice 2 (7 pts)

Une courbe plane est définie en coordonnées polaires par $r = r(\theta)$. Autrement dit, la paramétrisation de la courbe est de la forme

$$\gamma(\theta) = \Big(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta\Big)$$

où $\theta$ appartient à un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

1. Calculer la longueur d'arc en coordonnées polaires.
2. On rappelle que, pour une courbe régulière $\gamma(\theta)$ de classe $C^2$, la courbure est donnée par $\kappa(\theta) = \dfrac{|\det(\gamma'(\theta), \gamma''(\theta))|}{\|\gamma'(\theta)\|^3}$. Calculer la courbure en coordonnées polaires.
3. Déterminer ces quantités dans le cas de la cardioïde où

$$r(\theta) = a(1 + \cos\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad a > 0$$

## Exercice 3 (8 pts)

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient $x, y : I \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe$C^1$.
On considère la surface de révolution $S$ obtenue en faisant tourner la courbe paramétrée $c : I \to \mathbb{R}^3$ qui à $t$ associe $c(t) = (x(t), 0, y(t))$, contenue dans le plan $y = 0$, autours de l'axe $(Oz)$.
On suppose que $c$ est paramétrée par la longueur de l'arc, c'est-à-dire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$$

Un paramétrage de $S$ est alors donné par :

$$f : [0, 2\pi[ \times I \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (s,t) \mapsto f(s,t) = (x(t)\cos s, x(t)\sin s, y(t))$$

1. Quels sont les points singuliers de $f$ ?
2. On suppose que $x$ et $y$ sont de classe $C^2$. Lorsque $x(t) > 0$, exprimer la courbure de Gauss en tout point régulier en fonction de $x$ et $x''$. On pourra dériver l'équation $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$ pour simplifier l'expression.
3. A quelle condition sur les fonctions $x$ et $y$ la surface $f$ est-elle à courbure de Gauss nulle ?

## *Corrigé de l'examen final de Géométrie*
## 2020-2021

**Exercice 1.**

On considère la courbe paramétrée $\alpha$ définie par : $\alpha(t) = (3(\cos t + t\sin t), 3(\sin t - t\cos t), 2t^2)$.

1. *Déterminer les points réguliers de la courbe $\alpha$ :*
   Le vecteur vitesse est $\alpha'(t) = (3t\cos t, 3t\sin t, 4t)$. Sa norme est $\|\alpha'(t)\| = 5t \neq 0$ si $t \neq 0$. Donc les point réguliers de $\alpha$ sont les $\alpha(t)$ avec $t \in \mathbb{R}_+^*$ $(0.5 \times 3\ pts)$.
2. *Déterminer le repère de Frenet*
   On pose $v(t) = \|\alpha'(t)\| = 5t$. Le vecteur tangent est : $T(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{v(t)} = \dfrac{1}{5}(3\cos t, 3\sin t, 4)$ (0.5 pt).
   Le vecteur normal est $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$ or $T'(t) = \dfrac{1}{5}(-3\sin t, 3\cos t, 0)$ de norme $\|T'(t)\| = \dfrac{3}{5}$.
   D'où $N(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ (0.5 pt + 0.5 pt).
   Le vecteur binormal est donné par $B(t) = T(t) \wedge N(t) = (\dfrac{-4}{5}\cos t, \dfrac{-4}{5}\sin t, \dfrac{3}{5})$ (0.5 pt).
3. *Trouver la courbure et la torsion de la courbe $\alpha$*
   La courbure de $\alpha$ est la quantité $\kappa(t) = \dfrac{\|T'(t)\|}{v(t)} = \dfrac{3}{25t}$ (0.5 pt).
   La torsion est telle que : $B'(t) = -\tau(t).v(t).N(t)$. On calcule $B'(t) = (\dfrac{4}{5}\sin t, \dfrac{-4}{5}\cos t, 0)$ (0.5 pt). D'où $\tau(t) = \dfrac{-1}{v(t)}.B'(t).N(t) = \dfrac{4}{25t}$ (0.5 pt).

**Exercice 2.**

Soit $\gamma(t) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta), \theta \in I \subset \mathbb{R}$ la courbe paramétrée définie en coordonnées polaires.

1. *Calculer la longueur d'arc en coordonnées polaires :*
   Supposons que $r$ est de classe $C^1$. On a
   $$\gamma'(\theta) = (r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta, r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta). \quad (0.5pt)$$
   De norme $\gamma'(\theta) = \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}$ $(0.5pt)$. D'où
   $$l = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta. \quad (0.5pt)$$
2. *Calculer la courbure en coordonnées polaires :*
   La courbure d'une courbe $\gamma$ de classe $C^2$ est donnée par
   $$\kappa(\theta) = \frac{|\det(\gamma'(\theta), \gamma''(\theta))|}{\|\gamma'(\theta)\|^3}$$
   or
   $$\gamma'(\theta) = (r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta, r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta)$$
   Et
   $$\gamma''(\theta) = (r''(\theta)\cos\theta - 2r'(\theta)\sin\theta - r(\theta)\cos\theta, r''(\theta)\sin\theta + 2r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta) \ (0.5pt)$$

Ce qui donne

$$\det(\gamma'(\theta), \gamma''(\theta)) = (r(\theta)^2 + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta)) \quad (0.5pt)$$

Par conséquent

$$\kappa(\theta) = \frac{|r(\theta)^2 + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta)|}{(r'(\theta)^2 + r(\theta)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (0.5pt)$$

3. *Application : La cardioïde*
   La cardioïde est paramétrée par : $\gamma(\theta) = (a(1+\cos\theta)\cos\theta, a(1+\cos\theta)\sin\theta), \theta \in [0, 2\pi]$.
   $\gamma$ est bien de classe $C^k$.
   (a) Faisant varier l'angle polaire $\theta$ de $0$ à $\pi$ , on obtient la moitié de la longueur cherchée. On a ici $r'(\theta) = -a\sin\theta \quad (0.5pt)$. Par conséquent,

$$L(\gamma) = 2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta d\theta} = 2a\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\theta}d\theta \quad (0.5)pt$$

$$= 4a\int_0^\pi \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = 8a\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^\pi = 8a \quad (1pt)$$

   (b) La dérivée seconde de $r$ est $r''(\theta) = -a\cos\theta \quad (0.5pt)$. On en déduit l'expression de la courbure au point de paramètre $\theta$ :

$$\kappa(\theta) = \frac{|a^2(1+\cos\theta)^2 + 2a^2\sin^2\theta + a^2(1+\cos\theta)\cos\theta|}{(a^2sin^2\theta + a^2(1+\cos\theta)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{|3+3\cos\theta|}{8a\cos^3\frac{\theta}{2}} = \frac{3\cos^2\frac{\theta}{2}}{4a\cos^3\frac{\theta}{2}} \quad (1pt)$$

   Par conséquent

$$\kappa(\theta) = \frac{3}{4a\cos\frac{\theta}{2}} \quad (0.5pt)$$

**Exercice 3.**

Soit $S$ la surface de révolution dans $\mathbb{R}^3$ d'équation :

$$f(s,t) = (x(t)\cos s, x(t)\sin s, y(t)), (s,t) \in [0, 2\pi[ \times I$$

telle que $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$.

1. *Déterminons les points singuliers de $f$ :*
   Le calcul des dérivées partielles de $f$ donne

$$f_s = (-x(t)\sin s, x(t)\cos s, 0) \quad , \quad f_t = (x'(t)\cos s, x'(t)\sin s, y'(t)) \quad (0.5pt)$$

   Ce qui donne

$$f_s \wedge f_t = x(t)\,(y'(t)\cos s, y'(t)\sin s, -x'(t)) \quad (0.25pt)$$

   de norme

$$\|f_s \wedge f_t\| = |x(t)|\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = |x(t)| \quad (0.25pt)$$

   Le produit vectoriel s'annule si et seulement si $x(t)$ s'annule. Ainsi les points réguliers sont les points tels que $x(t) \neq 0$ (0.5 pt).
2. *Exprimons la courbure de Gauss en fonction de $x(t)$ et $x''(t)$ :*
   On se place en un point $p = f(s,t)$ régulier.

(a) Le vecteur normal unitaire est donné par

$$N_p = \frac{f_s \wedge f_t}{\|f_s \wedge f_t\|} = (y'(t)\cos s, y'(t)\sin s, -x'(t)) \quad (0.5pt)$$

(b) La matrice associée à la première forme fondamentale :

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_s.f_s & f_s.f_t \\ f_s.f_t & f_t.f_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (0.75pt)$$

(c) La matrice associée à la deuxième forme fondamentale :

$$II_p = \begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{ss}.N & f_{st}.N \\ f_{st}.N & f_{tt}.N \end{pmatrix}$$

d'autre part

$$f_{ss} = \Big(-x(t)\cos s, -x(t)\sin s, 0\Big), f_{st} = (-x'(t)\sin s, x'(t)\cos s, 0)$$

$$f_{tt} = (x''(t)\cos s, x''(t)\sin s, y''(t)) \quad (0.75pt)$$

Ainsi

$$II_p = \begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t)y'(t) & 0 \\ 0 & x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t) \end{pmatrix} \quad (0.75pt)$$

(d) La matrice associée à l'opérateur de forme $S_p$ est

$$M_{S_p} = I_p^{-1} II_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2(t)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x(t)y'(t) & 0 \\ 0 & x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t) \end{pmatrix} \quad (0.25pt)$$

$$M_{S_p} = \begin{pmatrix} \frac{-x(t)y'(t)}{x^2(t)} & 0 \\ 0 & x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t) \end{pmatrix} \quad (0.5pt)$$

(e) La courbure de Gauss est donnée par

$$K = \det M_{S_p} = \frac{y'(t)}{x(t)}\Big(x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)\Big) \quad (0.5pt)$$

qu'il faut maintenant simplifier. En dérivant l'équation $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$, on obtient

$$x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t) = 0 \ (0.25pt)$$

D'autre part, la même équation de départ peut se réécrire $y'(t)^2 = 1 - x'(t)^2$ $0.25pt$. En combinant ces deux résultats, on a

$$\begin{aligned} K &= \frac{x'(t)y'(t)y''(t) - x''(t)y'^2(t)}{x(t)} \\ &= \frac{-x'^2(t)x''(t) - x''(t) + x''(t)x'^2(t)}{x(t)} \quad (1pt) \\ &= -\frac{x''(t)}{x(t)} \end{aligned}$$

3. *Trouvons une condition sur $x(t)$ et $y(t)$ pour que $K = 0$*
Grâce à la question précédente, si la courbure de Gauss est nulle on peut trouver une équation simple vérifiée par $x(t)$.
Si $K = 0$ alors$x''(t) = 0$, donc $x(t) = At + B$ (0.5 pt), avec $A, B \in \mathbb{R}$
On a ensuite une expression explicite de $y'(t) = \pm\sqrt{1 - x'^2(t)}$ $(0.5pt)$ qui détermine $y(t)$ à une constante près.