Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen | **2020-2021**
Département de Mathématiques | **Examen final**
Module: Analyse numérique 2 | **Durée: 1h30**

Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 : On considère le système $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1) Ecrire la méthode itérative de Jacobi.
   Effectuer 2 itérations de la méthode de Jacobi à partir de $x^{(0)} = (0,0,0)^t$
2) Ecrire la méthode itérative de Gauss-Seidel.
   Effectuer 1 itération de la méthode de Gauss-Seidel à partir de $x^{(0)} = (0,0,0)^t$.
3) Réordonner le système de façon à assurer la convergence des deux méthodes.

Exercice 2 : Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -2tx(t) & t \in [0,1] \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

1) Calculer la solution exacte du problème de Cauchy.
2) En prenant le pas $h = 0.2$, calculer à l'aide de la méthode d'Euler une approximation de $x(0.4)$. En déduire une approximation de $x'(0.4)$.

Exercice3 :
1)
   (a) Obtenir le développement de Taylor de e^{-x} au voisinage de 0.
   (b) Déduire de (a) le développement de Taylor de e^{-t^2} au voisinage de 0.
   (c) Déduire de (b) le développement de Taylor de la fonction

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

2) En utilisant les 3 premiers termes du polynôme de Taylor de f, évaluer $f(1)$
3) Ecrire la formule des trapèzes avec 4 intervalles pour évaluer $f(1)$.
   Quel est le nombre minimal d'intervalles pour obtenir une approximation qui a une erreur inférieure à 0.01 ?
4) Programme Python (en 6 lignes) : Définir une fonction **trapeze** prenant en arguments une fonction F, deux réels a et b et un entier non nul n et renvoyant l'approximation de

$$\int_a^b F(t)dt$$

par la méthode des trapèzes avec n intervalles

Correction *1p rédaction*

Exercice 2 : On considère le système $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

avec $A = D - L - U$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \; L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) La méthode de Jacobi s'écrit donc

$$(J) \begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases}$$

1p

$$B = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 9/2 & 0 & 1/2 \\ -1/9 & 2/9 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c = D^{-1}b = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour $x^{(0)} = (0,0,0)^t$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(\quad + 5 \; x_2^{(k)} - 1 \; x_3^{(k)} \right) -3, \\ x_2^{(k+1)} = \left(+ 9/2 \; x_1^{(k)} \quad + 1/2 \; x_3^{(k)} \right) -4, \\ x_3^{(k+1)} = \left(- 1/9 \; x_1^{(k)} + 2/9 \; x_2^{(k)} \quad \right) +1. \end{cases}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	-3	-4	1
2	-24	-17	$4/9$

1p

2) La méthode de Gauss-Seidel s'écrit donc

$$(G) \begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases}$$

$$B = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 0 & 45/2 & -4 \\ 0 & 40/9 & -7/9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c = (D-L)^{-1}b = \begin{pmatrix} -3 \\ -35/2 \\ -23/9 \end{pmatrix}$$ *1p*

pour $x^{(0)} = (0,0,0)^t$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= \Big(\qquad\qquad + 5 \quad x_2^{(k)} \quad - 1 \quad x_3^{(k)} \Big) \quad -3, \\ x_2^{(k+1)} &= \Big(+ 9/2 \quad x_1^{(k+1)} \qquad\qquad +1/2 \quad x_3^{(k)} \Big) \quad -4, \\ x_3^{(k+1)} &= \Big(- 1/9 \quad x_1^{(k+1)} \quad + 2/9 \quad x_2^{(k+1)} \qquad\qquad \Big) \quad +1. \end{cases}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	-3	$-35/2$	$-23/9$

1p

3) **Théorème** : Si A est à diagonale strictement dominante

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad \forall i = 1, ..., n$$

alors les méthodes de Gauss-Seidel et Jacobi sont convergentes. *1p*
Si on réordonne le système de la façon suivante

$$\begin{cases} 9x_1 & -2\ x_2 & + x_3 & = 8, \\ -x_1 & +5\ x_2 & - x_3 & = 3, \\ x_1 & - 2x_2 & + 9x_3 & = 9. \end{cases}$$

On obtient une matrice à diagonale strictement dominante.
Exercice 2 : Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -2tx(t) \qquad t \in [0,1] \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

1) la solution exacte : $x(t) = e^{-t^2}$. *1p*
2) La méthode d'Euler avec un pas $h = 0.2$.

$$\begin{cases} t_0 = 0, x_0 = 1 \\ t_{n+1} = t_n + h \\ x_{n+1} = x_n - 2ht_nx_n \end{cases}$$ *0.5p*

t_n	y_n
0	1
0.2	1
0.4	0.92

1p

Donc $x(0.4) = 0.92$.
On a $x'(t) = -2tx(t)$ alors $x'(0.4) = -2 \times 0.4x(0.4) = 0.736$. *0.5p*

Exercice :

1)

(a) Développement de Taylor de e^{-x} au voisinage de $x_0 = 0$. On a

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^n\ x^n}{n!} + e^{-\xi}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{où } \xi \in [0, x]$$ 1p

(b) Déduire de (a) le développement de Taylor de e^{-t^2} au voisinage de 0. On a

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + ... + \frac{(-1)^n\ t^{2n}}{n!} + e^{-\xi}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}t^{2(n+1)} \quad \text{où } \xi \in [0, t^2]$$ 1p

(c) Déduire de (b) le développement de Taylor de la fonction f. On a

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^x e^{-\xi(t)}t^{2(n+1)}dt$$ 1p

2) En utilisant les 3 premiers termes du développement de Taylor de f

$$f(1) \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \approx 0.7667$$ 1p

3) La formule des trapèzes avec $n = 4$ intervalles : $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{4}$

$$\int_a^b F(t)dt \approx \frac{h}{2}\left(F(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} F(a+ih) + F(b)\right)$$ 1p

$$f(1) = \int_0^1 e^{-t^2}dt \approx \frac{1}{8}\left(1 + 2e^{-(1/4)^2} + 2e^{-(1/2)^2} + 2e^{-(3/4)^2} + e^{-1}\right)$$ 1p

L'erreur

$$|E| = \left|\frac{(b-a)}{12}h^2F''(\xi)\right| = \left|\frac{1}{12n^2}4(\xi^2 - \tfrac{1}{2})e^{-\xi^2}\right| \leq \frac{1}{6n^2} \quad \text{où } \xi \in [0, 1]$$ 2p

Pour $|E| \leq 0.01$ on obtient $n^2 \geq \dfrac{100}{6} = 16.6666$. Le nombre minimal d'intervalles est 5.

4) Programme Python (en 6 lignes) :

```python
def trapeze(F,a,b,n):
    h = (b-a)/(n)
    s=(F(a)+F(b))/2
    for i in range(1,n):
        s+=F(a+i*h)
    return h*s
```

3p