

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 4.

Module : *Analyse 4* - Examen.

Jeudi 03/06/2021 - Durée : 01h30mn.

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (06pts) On considère la fonction définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 2 : (08pts) On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne. Calculer la distance D du point $A(1, 2)$ au cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. On rappelle que

$$D = \min_{(x, y) \in C} \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}$$

où $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Exercice 3 : (06pts) Calculer l'aire du domaine U du plan $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } y \geq |x|\}$$

2^{ème} année Licence de Mathématiques - S4 - 2020/2021.

Module : "Analyse 4" - Examen - Corrigé.

Exercice 1: (06 pts) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1/ f est continue sur $\mathbb{R}^2$. En effet:

• Si $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, f est continue en (x_0, y_0) car c'est une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) dont le dénominateur ne s'annule pas. 1pt

• Si $(x_0, y_0) = (0,0)$. On a $\frac{x^2}{x^2 + y^4} \leq 1$ (évident)

d'où $|f(x,y)| = \frac{x^2 |xy|}{x^2 + y^4} \leq |xy|$. Ainsi si 2pts

$(x,y) \rightarrow (0,0)$, alors $|xy| \rightarrow 0$ et donc $|f(x,y)| \rightarrow 0$

càd $f(x,y) \rightarrow 0 = f(0,0)$, d'où la continuité en $(0,0)$.

2/ Différentiabilité en $(0,0)$? On a $\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \frac{0}{x} = 0$

d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. De même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. 1pt

Donc le candidat à être la différentielle est $df_{(0,0)}(h_1, h_2) = ah_1 + ah_2 = 0$.

Formons le rapport: $\frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - df_{(0,0)}(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{h_1^3 h_2}{(h_1^2 + h_2^4) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$

On a déjà $\frac{h_1^2}{h_1^2 + h_2^4} \leq 1$ et $\frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{h_1^2 + h_2^2} \leq \frac{1}{2}$. D'où

$\left| \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - df_{(0,0)}(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leq \frac{|h_1 h_2| \sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{h_1^2 + h_2^2} \leq \frac{1}{2} \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ 2pts

Comme $\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \xrightarrow{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} 0$ alors le rapport en question tend vers 0.

Ceci prouve que f est différentiable en $(0,0)$. Oui.

Exercice 2: (08 pts)

$$D = \min_{(x,y) \in (C)} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

où $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$.

On a facilement $D^2 = \min_{(x,y) \in (C)} [(x-1)^2 + (y-2)^2]$.

Posons $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$ et $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

C'est donc un problème d'extrema liés. Posons:

$$F(x,y,\lambda) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2(x-1) - 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)x = 1 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-2) - 2\lambda y = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)y = 2 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Il est clair que $\lambda \neq 1$, sinon le système n'aurait pas de solution.

Donc $x = \frac{1}{1-\lambda}$ et $y = \frac{2}{1-\lambda} \Rightarrow \frac{1}{(1-\lambda)^2} + \frac{4}{(1-\lambda)^2} = 1$ et donc

$$(1-\lambda)^2 = (2-1)^2 = 5 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1 \pm \sqrt{5}} \text{ ou bien } \lambda_1 = 1 + \sqrt{5}, \lambda_2 = 1 - \sqrt{5}.$$

$\lambda_1 = 1 - \sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$; c'est le pt $B(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$.

$\lambda_2 = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ et $y = \frac{-2}{\sqrt{5}}$; c'est le pt $E(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$.

Le pt B réalise le minimum de la distance de A à (C). Pour le montrer Calculons la Hessienne $H_F^{x,y}$ (sous-hessienne)

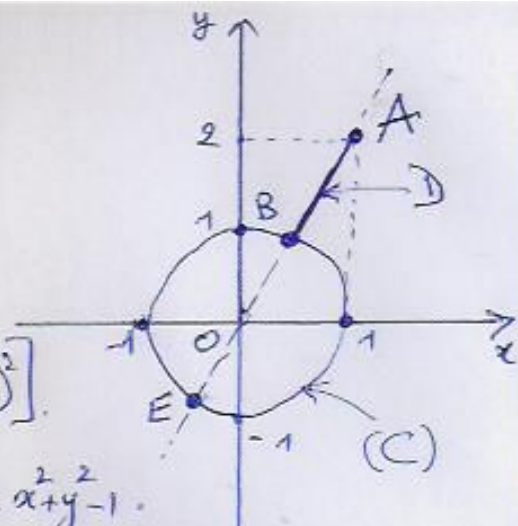
$$H_F^{x,y} = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda) & 0 \\ 0 & 2(1-\lambda) \end{pmatrix}; H_F^{x,y}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ de finie positive.}$$

Donc B est bien le pt où la distance D est atteinte. $H_F^{x,y}(\lambda_2) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{5} \end{pmatrix}$

est de finie négative, donc E réalise le maximum.

Donc $D^2 = f(B) = (\frac{1}{\sqrt{5}} - 1)^2 + (\frac{2}{\sqrt{5}} - 2)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{5} + \frac{24-8\sqrt{5}}{5}$

$$D^2 = \frac{30-10\sqrt{5}}{5} = 6-2\sqrt{5} \Rightarrow \boxed{D = \sqrt{6-2\sqrt{5}}}$$



1pt

2pt

1pt

1pt

1pt

1pt

2

Exercice 3: (06 pts)

Calculons les abscisses de

$$A \text{ et } B: x^2 + |x|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ainsi U est un domaine simple:

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } |x| \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

$$\text{Aire}(U) = \iint_U dx dy = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\int_{|x|}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right] dx \quad (\text{par Fubini})$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\sqrt{1-x^2} - |x| \right] dx = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\sqrt{1-x^2} - x \right] dx \quad (\text{avec la parité})$$

Posons $x = \sin \theta$, alors:

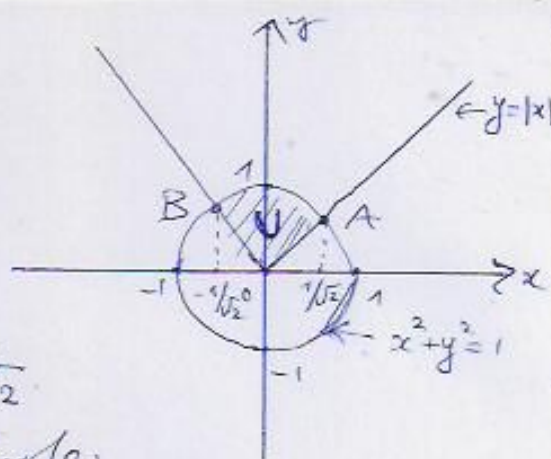
$$\text{Aire}(U) = 2 \int_0^{\pi/4} [\cos \theta - \sin \theta] \cos \theta d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi/4} \left[\frac{1 + \cos 2\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{2} \right] d\theta$$

$$= \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{0}{2} \right) - \left(0 + \frac{0}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Aire}(U) = \pi/4}$$



0,5 pt

1 pt

1 pt

1,5 pt

1,5 pt

0,5 pt

3