Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2020/2021 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°5

Exercice 1 : Pour chacune des intégrales suivantes, dire en quel(s) point(s) elle est impropre, puis étudier sa convergence.

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx \ , \ I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \ , \ I_3 = \int_0^{\pi/2} \tan x \, dx \ , \ I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx$$

Exercice 2 : Étudier, suivant les valeurs des paramètres, la convergence de chacune des intégrales suivantes

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx \quad , \quad \beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx \quad , \quad J_\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\lambda}\, dx$$

Exercice 3 : Soit a un paramètre réel strictement positif. On considère l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin ax \, dx$$

1. Montrer de deux façons différentes que I_a est convergente.
2. En procédant par intégrations par parties successives, calculer la valeur de I_a.

Exercice 4 : Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue et décroissante. Montrer que si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge, alors la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge aussi. Étudier la réciproque. (Ceci est le critère de comparaison entre une série et une intégrale impropre)

Exercice 5 : Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction de classe C^1. On suppose que les intégrales impropres $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(x)\, dx$ convergent toutes les deux. Montrer alors que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.