

Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2020/2021 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°4

Exercice 1 : Pour chacune des fonctions suivantes, vérifier les conditions du théorème de Dirichlet puis déterminer leurs séries de Fourier :

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ bx & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}, \quad g(x) = x^2 \text{ dans }]-\pi, \pi[\text{ puis dans }]0, 2\pi[$$

$$h(x) = |x| \text{ dans }]-1, 1[\quad , \quad u(x) = \sin(ax) \text{ dans }]-\pi, \pi[$$

Exercice 2 : A l'aide de certaines séries de Fourier précédentes calculer les somme suivantes (justifier)

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad S_2 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}, \quad S_3 = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{4k+2}{(4k+2)^2 - 1}$$

Exercice 3 : On considère la fonction de deux variables réelles

$$F(x, y) = \ln(1 - 2y \cos x + y^2)$$

où $y \neq \pm 1$.

1. En considérant x fixe, déterminer le développement en série entière centrée en 0 de F (comme fonction de y) en développant d'abord $\frac{\partial F}{\partial y}$.
2. En déduire, sans faire de nouveaux calculs, le développement de F en séries de Fourier (comme fonction de x).

Exercice 4 : Trouver, en utilisant l'identité de Parseval-Plancherel, toutes les fonctions $f \in C^2_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$ et qui vérifient

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad |f''(x)| \leq |f(x)| \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

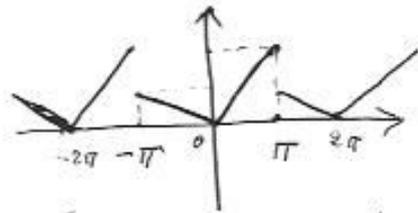
Exercice 5 : On considère la fonction $g(x) = |\sin x|$.

1. Montrer que c'est une fonction π -périodique. Déterminer sa série de Fourier. La somme de cette série est-elle égale à g ?
2. Soit l'équation différentielle $y''(x) + y(x) = g(x)$. Montrer qu'elle admet une solution particulière π -périodique et ce en déterminant sa série de Fourier.

2^{ème} année de Licence Mathématique - 2020/2021.

Module: "Analyse 3" - Série de TD N° 4 - Corrigé.

Exercice 1: $x \mapsto f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ bx & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$



Il est clair que les discontinuités sont de première espèce aux points $\dots, -\pi, \pi, 3\pi, \dots$

$$f(\pi^+) = -a\pi, \quad f(\pi^-) = b\pi \quad \text{etc...}$$

(ici par exemple $a < 0, b > 0$)

Les points de non-dérivabilité sont: i) les pts de discontinuité
ii) les points $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

avec une dérivée à gauche et une dérivée à droite. Donc f est bien C^1 par morceaux.

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 ax dx + \int_0^{\pi} bx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\left(a \frac{x^2}{2} \right)_{-\pi}^0 + \left(b \frac{x^2}{2} \right)_0^{\pi} \right] \Rightarrow \boxed{a_0(f) = \frac{(b-a)\pi}{2}} \end{aligned}$$

$n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 ax \cos nx dx + \int_0^{\pi} bx \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[a \int_{-\pi}^0 x d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) + b \int_0^{\pi} x d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[a \left[x \sin nx \right]_{-\pi}^0 - a \int_{-\pi}^0 \sin nx dx + b \left[x \sin nx \right]_0^{\pi} - b \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{-1}{n\pi} \left[a \left[\frac{-\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + b \left[\frac{-\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{n^2\pi} \left[a(1 - (-1)^n) + b((-1)^n - 1) \right] = \boxed{\frac{a-b}{n^2\pi} (1 - (-1)^n)} \end{aligned}$$

$$a_n(g) = \frac{4}{n^2\pi} \left[\pi (-1)^n - \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^\pi \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n(g) = \frac{4(-1)^n}{n^2}}$$

Donc $\forall x \in]-\pi, \pi[$:

$$\boxed{x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx}$$

Remarque: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$
 mais sur un autre intervalle que $]-\pi, \pi[$, l'expression de g
 change, mais pas la série de Fourier. Par exemple:

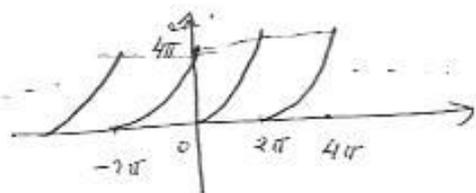
$$\forall x \in]\pi, 3\pi[, g(x) = (x - 2\pi)^2 \text{ etc, ...}$$

$$\forall x \in]-3\pi, -\pi[; g(x) = (x + 2\pi)^2$$

* $g_2(x) = x^2$ dans $]0, 2\pi[$

Ici ce n'est plus la même
 fonction que la précédente.

Elle n'est ni paire, ni impaire.



$$a_0(g_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2\pi} \Rightarrow \boxed{a_0(g_2) = \frac{8\pi^2}{3}}$$

$$\begin{aligned} a_n(g_2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[\left(\frac{x^2 \sin nx}{n} \right) \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} x \sin nx dx \right] = \frac{2}{n\pi} \int_0^{2\pi} x d\left(\frac{\cos nx}{n}\right) \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \left[\left(x \cos nx \right) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos nx dx \right] \Rightarrow \boxed{a_n(g_2) = \frac{4}{n^2}} \end{aligned}$$

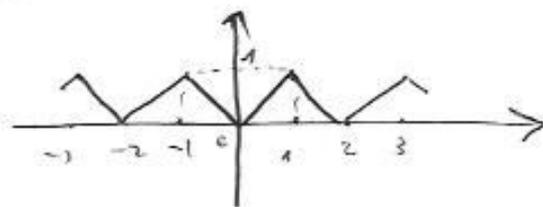
$$\begin{aligned}
 b_n(g_2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 d\left(\frac{-\cos nx}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{n\pi} \left[\left(-x^2 \cos nx\right)_0^{2\pi} + 2 \int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx \right] \\
 &= \frac{-4\pi}{n} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{2\pi} x d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = \frac{-4\pi}{n} + \frac{2}{n^2\pi} \left[\left(x \frac{\sin nx}{n}\right)_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin nx \, dx \right] \\
 &\Rightarrow \boxed{b_n(g_2) = \frac{-4\pi}{n}}
 \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in]0, 2\pi[$

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \left\{ \frac{1}{n^2} \cos nx - \frac{\pi}{n} \sin nx \right\}$$

* $h(x) = |x|$ dans $]-1, 1[$. La fonction h est 2-périodique
 paire continue sur \mathbb{R} . $\omega = \pi$

Les points de non-dérivabilité
 sont les entiers relatifs avec
 dérivée à droite et à gauche.



ex: $h'(0^+) = 1$, $h'(0^-) = -1$ etc...

Les $b_n(h) = 0$ car h paire.

$$a_0(h) = \int_{-1}^1 |x| \, dx = 2 \int_0^1 x \, dx = [x^2]_0^1 \Rightarrow \boxed{a_0(h) = 1}$$

$$\begin{aligned}
 a_n(h) &= \int_{-1}^1 |x| \cos(n\pi x) \, dx = 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) \, dx \\
 &= 2 \int_0^1 x d\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right) = \frac{2}{n\pi} \left\{ \left[x \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \sin n\pi x \, dx \right\} \\
 &= \frac{2}{n^2\pi} [\cos n\pi x]_0^1 \Rightarrow \boxed{a_n(h) = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi}}
 \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in]-1, 1[$

$$|x| = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(n\pi x)$$

$$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}$$

* $u(x) = \sin(ax)$ dans $]-\pi, \pi[$, Impaire, 2π -périodique
on calcule seulement les $b_n(u)$.

$$b_n(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ax) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(ax) \sin(nx) dx.$$

On a : $2 \sin(ax) \sin(nx) = \cos(n-a)x - \cos(n+a)x$

On discute selon les valeurs de a .

1^{er} cas : $a \notin \mathbb{Z}$ c'ad $\forall n \geq 1, n-a \neq 0$ et $n+a \neq 0$.

$$b_n(u) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-a)x}{n-a} - \frac{\sin(n+a)x}{n+a} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-a)\pi}{n-a} - \frac{\sin(n+a)\pi}{n+a} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(n\pi) \sin a\pi}{n-a} + \frac{\cos(n\pi) \sin a\pi}{n+a} \right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} \sin a\pi}{\pi} \left[\frac{1}{n+a} + \frac{1}{n-a} \right]$$

$$b_n(u) = (-1)^{n-1} \frac{2 \sin a\pi}{\pi(n^2 - a^2)}$$

et $\forall x \in]-\pi, \pi[$ $\sin ax = \left(\frac{2 \sin a\pi}{\pi} \right) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n^2 - a^2}$

2^{ème} cas: $a \in \mathbb{Z}$. Si $n \neq |a|$, le calcul précédent

reste valable, mais $\sin(n-a)\pi = 0 = \sin(n+a)\pi$

$\Rightarrow b_n(x) = 0$, dans ce cas.

Il reste donc un seul coefficient $b_{|a|}(x) = \text{sign}(a)$

car $\sin(ax) = \text{sign}(a) \cdot \sin(|a|x)$.

La série de Fourier ne contient qu'un seul terme.

Exercice 2: * $S_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$?

Prends la fonction $g(x) = x^2$ dans $]-\pi, \pi[$. $x=0$ est un point de continuité, donc

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \Rightarrow \boxed{S_1 = \frac{\pi^2}{12}}$$

* $S_2 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$? On peut utiliser l'égalité de

Parseval-Plancherel toujours à $g(x) = x^2$ dans $]-\pi, \pi[$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = 2 \int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^5}{5} \quad \text{Donc}$$

$$\frac{|a_0(g)|^2}{2} + \sum_{n \geq 1} |a_n(g)|^2 + |\cancel{b_n}|^2 = \frac{1}{\pi} \|g\|^2$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n \geq 1} \frac{16}{n^4} = \frac{2\pi^4}{5} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{8}{n^4} = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_2 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

$$* S_3 = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{4k+2}{(4k+2)^2 - 1} \quad ?$$

On peut utiliser le développement de $\sin(ax)$, avec $x = \pi/2$ qui est un point de continuité: ($a \notin \mathbb{Z}$)

$$\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right) = \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2 - a^2}$$

$$\text{or } \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n=2k \\ (-1)^k & \text{si } n=2k+1 \end{cases} ; \text{ donc}$$

$$\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right) = \frac{2 \sin(a\pi)}{\pi} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)^2 - a^2}$$

Il suffit de prendre $a = 1/2$ pour avoir:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)^2 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{2(2k+1)}{(4k+2)^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_3 = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}}$$

Exercice 3: $F(x, y) = \ln(1 - 2y \cos x + y^2)$, $y \neq \pm 1$

soit $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-2 \cos x + 2y}{1 - 2y \cos x + y^2}$. Pour développer cette

fonction en série entière de y , décomposons-la en éléments simples. Factorisons le dénominateur: $\Delta' = \cos^2 x - 1$

$$\Delta' = -\sin^2 x \Rightarrow \Delta' = i^2 \sin^2 x \text{ et donc}$$

$$y_1 = \cos x - i \sin x \text{ et } y_2 = \cos x + i \sin x, \text{ d'où}$$

$$1 - 2y \cos x + y^2 = (y - e^{-ix})(y - e^{ix}) = (1 - ye^{ix})(1 - ye^{-ix})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-2 \cos x + 2y}{(1 - ye^{ix})(1 - ye^{-ix})} = \frac{-e^{ix}}{1 - ye^{ix}} + \frac{-e^{-ix}}{1 - ye^{-ix}}$$

Si: $(|ye^{ix}| < 1 \text{ et } |ye^{-ix}| < 1) \Leftrightarrow (|y| < 1)$ on aura

$$\frac{\partial F}{\partial y} = - \sum_{n \geq 0} y^n e^{i(n+1)x} - \sum_{n \geq 0} y^n e^{-i(n+1)x}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} = -2 \sum_{n \geq 0} [\cos(n+1)x] y^{n+1}}$$

$$\text{d'où } F(x, y) = -2 \sum_{n \geq 0} \frac{\cos(n+1)x}{n+1} y^{n+1} + C^{st} \text{ or } F(x, 0) = 0$$

$$\text{donc } C^{st} = 0 \Rightarrow \boxed{F(x, y) = -2 \sum_{m \geq 1} \frac{\cos mx}{m} y^m}$$

Ceci représente aussi le développement en série de Fourier de $F(x, y)$

avec y fixé, on aura: $a_0 = 0$, $a_m = \frac{-2y^m}{m}$, $b_m = 0$

Si : $|y| > 1$ alors $F(x,y) = \ln y^2 + \ln \left(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y} \cos x + 1 \right)$

$$F(x,y) = 2 \ln |y| + \ln \left(1 - \frac{2}{y} \cos x + \frac{1}{y^2} \right), \text{ et } \frac{1}{|y|} < 1$$

On reprend les calculs précédents en remplaçant y par $\frac{1}{y}$

donc
$$F(x,y) = 2 \ln |y| - 2 \sum_{m \geq 1} \frac{\cos mx}{m y^m}$$

ici $a_0 = 4 \ln |y|$, $a_m = \frac{-2}{m y^m}$ et $b_m = 0$.

Exercice 4: $f \in C^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ et $|f''(x)| \leq |f(x)|$
 $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

Le problème est de trouver f ?

f admet un développement en série de Fourier, qu'on écrit sous la forme complexe: $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \cdot e^{inx}$

où $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$. f' et f'' étant

continues, admettent aussi des développements. Calculons

celui de f' .
$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[f(x) e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi} \left[\underbrace{f(\pi)} - \underbrace{f(-\pi)} \right] + in c_n(f)$$

$= 0$ par la périodicité.

$$\Rightarrow c_n(f') = in c_n(f) \Rightarrow \boxed{c_n(f'') = -n^2 c_n(f)}$$

Ecrivons les identités de Parseval-Plancherel pour f et f'' :

$$2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f'')|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|^2 dx$$

$$\text{et } \left\{ 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right. \quad (1)$$

or $c_n(f'') = -n^2 c_n(f)$ donc

$$\left\{ 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^4 |c_n(f)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|^2 dx \right. \quad (2)$$

Faisons (2) - (1) :

$$2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n^4 - 1) |c_n(f)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (|f''(x)|^2 - |f(x)|^2) dx.$$

$$\Leftrightarrow -2\pi |c_0(f)|^2 + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0, 1, -1}} (n^4 - 1) |c_n(f)|^2 \leq 0 \quad \text{car } |f''(x)| \leq |f(x)|$$

\Downarrow
 $|f''(x)|^2 \leq |f(x)|^2$

or $c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$

$$\text{Donc } \sum_{|n| \geq 2} (n^4 - 1) |c_n(f)|^2 \leq 0$$

Mais ceci est impossible car tous les termes de cette série sont ≥ 0 , sauf si $\forall n, |n| \geq 2, (n^4 - 1) |c_n(f)|^2 = 0$

mais $n^4 - 1 \neq 0$ ($|n| \geq 2$), donc $|c_n(f)|^2 = 0 \Rightarrow c_n(f) = 0, \forall n, |n| \geq 2$

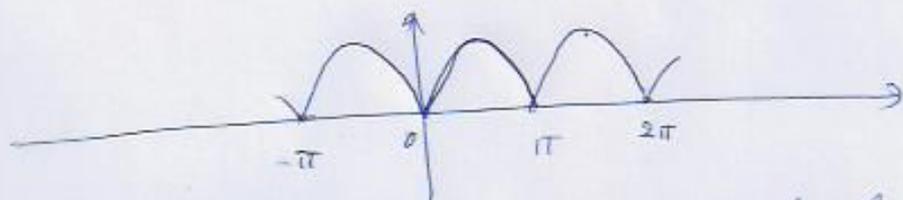
Donc $f(x) = c_1(f) e^{ix} + c_{-1}(f) e^{-ix}$

$$\text{Ainsi } \boxed{f(x) = A e^{ix} + B e^{-ix}} \quad \begin{matrix} A, B \text{ constantes} \\ \text{q.c.q.} \end{matrix}$$

Exercices: $g(x) = |\sin x|$

$$1^{\text{o}}/ g(x+\pi) = |\sin(x+\pi)| = |\sin x \cos \pi| = |\sin x| = g(x)$$

Ainsi g est π -périodique et sur la période $[0, \pi]$, $g(x) = \sin x$.



g est continue sur \mathbb{R} , C^1 par morceaux car les pts $k\pi$ sont des discontinuités de 1^{ère} espèce pour $g'(x)$.

De plus g est paire, donc les $b_n(g) = 0$. ($\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$)

$$a_0(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} [-\cos x]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(2nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x] \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} - \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-2}{2n-1} - \frac{-2}{2n+1} \right] = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)} \end{aligned}$$

$$\text{et donc } \boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}}$$

2^o/ Soit l'équation différentielle: $y''(x) + y(x) = g(x)$.

Cherchons y comme somme d'une série de Fourier π -périodique.

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos 2nx + b_n \sin 2nx$$

$$\Rightarrow y'' = \sum_{n \geq 1} (-4n^2) a_n \cos 2nx + (-4n^2) b_n \sin 2nx$$

$$\Rightarrow y'' + y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (1-4n^2) a_n \cos 2nx + (1-4n^2) b_n \sin 2nx$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$$

Comme le développement en série de Fourier est unique, alors

$$\begin{cases} \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi} \\ (1-4n^2) a_n = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)} \\ (1-4n^2) b_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{4}{\pi} \\ b_n = 0, \quad n \geq 1 \\ a_n = \frac{4}{\pi(4n^2-1)^2} \end{cases}$$

Donc

$$y(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)^2}$$