Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2020/2021 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°3

Exercice 1 : Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes, puis son domaine de convergence simple :

$$\sum (\ln n)\, x^n \quad , \quad \sum \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} x^n \quad , \quad \sum \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1} \quad , \quad \sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

Exercice 2 : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. On pose

$$b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$$

et on note R' le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$. Montrer d'abord que $R' \geq \max(1, R)$, puis que $R' = \max(1, R)$.

Exercice 3 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ puis exprimer sa somme à l'aide de fonctions élémentaires

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)} \qquad , \qquad a_n = \frac{1}{n}\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

Exercice 4 : Développer chacune des fonctions suivantes en série entière centrée en 0 et préciser le domaine de validité du développement (tout justifier)

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 3x + 2\right) \qquad , \qquad g(x) = \int_0^x \cos\left(t^2\right)\, dt$$

Exercice 5 : On considère la fonction $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ définie sur $I =]-1, 1[$ et on se propose de la développer en série entière centrée en 0.

1. Dire pourquoi f est analytique sur I.
2. Calculer f', puis former à l'aide de f et f' une équation différentielle simple linéaire d'ordre 1.
3. Résoudre cette équation différentielle.
4. Conclure.