

Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2020/2021 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°2

Exercice 1 : Déterminer le domaine de convergence simple des séries de fonctions suivantes :

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \quad , \quad \sum 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \quad , \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n(x-5)^n} \quad , \quad \sum \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right)$$

Exercice 2 : Étudier la convergence normale puis uniforme des séries suivantes sur les domaines respectifs :

$$\sum \frac{\sin nx}{2^n} \quad \text{sur } \mathbb{R} \quad , \quad \sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \quad \text{sur } [0, 1]$$

Exercice 3 : Posons

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}.$$

Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle est partout dérivable.

Exercice 4 : A l'aide des opérations de "dérivation" et/ou "d'intégration" terme à terme, calculer les sommes suivantes en précisant le domaine de validité des calculs.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$$

Licence 2^{ème} année - Semestre 3 - 2020/2021.

Module: "Analyse III" - Liste de T.D n°2 - Corrige!

Exercice 1: a/ $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

* Si $x \leq 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$ n'existe pas

et la série diverge.

* Si $x > 0$: La série converge grâce au critère d'Abel.

Donc le domaine de convergence simple est $\boxed{I =]0, +\infty[}$

b/ $v_n(x) = 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$. Rappelons que $\boxed{\sin t = t + t \varepsilon(t) = t(1 + \varepsilon(t))}$
($t \neq 0$) et $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$

* Si $x = 0$: $v_n(0) = 0$, donc la série converge simplement en $x = 0$.

* Si $x > 0$: $v_n(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^n x \left[1 + \varepsilon\left(\frac{x}{3^n}\right)\right]$ ($q^d n \rightarrow +\infty$).

Ainsi $v_n(x) \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n x$ qui converge car c'est une série géométrique avec $q = \frac{2}{3} < 1$.

donc $\sum v_n(x)$ converge.

* Si $x < 0$: alors $x = -y$, $y > 0$ et $v_n(x) = -v_n(y)$

comme $\sum v_n(y)$ converge ($2^{\text{ème cas}}$), alors $\sum v_n(x)$ converge.

En définitive: le domaine de convergence simple est $\boxed{I = \mathbb{R}}$

c/ $w_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n 3^n (x-5)^n}$. La série est définie si $x \neq 5$.

* Si $x > 5$: La convergence a lieu par Abel.

* Si $x < 5$: alors $w_n(x) = \frac{-1}{n 3^n (5-x)^n}$ et $\left| \frac{w_{n+1}(x)}{w_n(x)} \right| = \frac{n}{(n+1) \cdot 3(5-x)} \rightarrow \frac{1}{3(5-x)}$

La convergence est assurée si $\frac{1}{3(5-x)} < 1 \Rightarrow 5-x > \frac{1}{3} \Rightarrow x < 5 - \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$

Le domaine de convergence simple est $\boxed{I =]-\infty, \frac{14}{3}[\cup]5, +\infty[}$

(1)

d/ $\Theta_n(x) = x^n + \frac{1}{2^n x^n}$, la série est définie pour $x \neq 0$.

a/ $x > 0$: si $0 < x < 1$ et $0 < \frac{1}{2x} < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n(x) = 0$
pour assurer la condition nécessaire de convergence.

Ces deux cas donnent $\frac{1}{2} < x < 1$.

Si $x \geq 1$ ou $x \leq \frac{1}{2}$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n(x) \neq 0$
et la série diverge.

Ainsi, pour $\frac{1}{2} < x < 1$, $\sum x^n$ et $\sum \frac{1}{2^n x^n}$ convergent
donc $\sum \Theta_n(x)$ converge.

b/ $x < 0$: On pose $x = -y$, $y > 0$ et donc $\Theta_n(x) = (-1)^n \Theta_n(y)$

Pour $\frac{1}{2} < y < 1$, $\Theta_n(y) > 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n(y) = 0$ et $\sum \Theta_n(y)$
converge, donc $\sum \Theta_n(x)$ converge absolument.

Pour $y \geq 1$ ou $y \leq \frac{1}{2}$, puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n(y) \neq 0$, alors
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n(x)$ n'existe pas.

En définitive le domaine de convergence sera $\boxed{]-1, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[}$

Exercice 2: a/ $u_n(x) = \frac{\sin nx}{2^n}$, sur $\mathbb{R}$.

$$\text{On a } |u_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} |u_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$$

Comme $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, donc $\sum \sup_{\mathbb{R}} |u_n(x)|$ converge
aussi. C'est la convergence normale sur $\mathbb{R}$, qui
implique à son tour la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

b/ $W_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ sur $[0,1]$ ($n \geq 1$).

On a $|W_n(x)| = \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ car $x \in [0,1]$
 $\leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ Cette majoration ne permet pas de conclure.

Mais $\sup_{[0,1]} x^n = 1$ et donc $\boxed{\sup_{[0,1]} |W_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}}}$

Comme $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, donc pas de convergence normale sur $[0,1]$.

Examinons la convergence uniforme. On a :

$$W_n(x) = a_n(x) \cdot b_n(n) \text{ avec } \begin{cases} a_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n}} \\ b_n(n) = (-1)^{n-1} \end{cases}$$

$$* \left| \sum_{k=1}^n b_k(n) \right| \leq 1 \Rightarrow \sup_{[0,1]} \left| \sum_{k=1}^n b_k(n) \right| \leq 1$$

$$* a_n(x) \geq 0, 0 \leq a_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(x) = 0$$

$$\text{et } \sup_{[0,1]} a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Reste à vérifier que $a_n(x)$ est décroissante en n .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pour } x \in [0,1], \text{ on a } x^{n+1} \leq x^n \\ \text{et aussi } \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \end{array} \right\} \Rightarrow a_{n+1}(x) \leq a_n(x).$$

En définitive, d'après le critère d'Abel uniforme,

la série $\sum W_n(x)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 3 : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}.$

a/ Dire que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, veut dire que la série converge $\forall x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \right|}{\left| \frac{x^n}{n^n} \right|} &= |x| \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = |x| \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= |x| \cdot \frac{1}{n+1} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Donc la série converge absolument, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b/ Pour montrer que f est partout dérivable, il suffit de montrer que la série des dérivées $\sum \frac{n x^{n-1}}{n^n}$ converge uniformément sur tout intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ car la dérivation est une opération locale.

On peut toujours mettre un intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ dans un intervalle $[-a, a]$. Posons $h_n(x) = \frac{n x^{n-1}}{n^n} = \frac{x^{n-1}}{n^{n-1}}$.

Alors $|h_n(x)| = \frac{|x|^{n-1}}{n^{n-1}} \leq \frac{a^{n-1}}{n^{n-1}}$ sur $x \in [-a, a]$.

Posons $f_n = \frac{a^{n-1}}{n^{n-1}}$. Alors $\boxed{\sup_{[-a, a]} |h_n(x)| \leq f_n}$

et $f_n^{1/n} = \left(\frac{a}{n} \right)^{1-1/n} = e^{(1-1/n)[\ln a - \ln n]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$

donc la série numérique $\sum f_n$ converge, alors la série $\sum h_n(x)$ converge normalement sur $[-a, a]$ donc uniformément. (C.Q.F.D.).

Exercice 4 :

a/ $S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$. Étudions d'abord la convergence de cette série avec le critère de d'Alembert.

Prenons $u_n(x) = \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$. Alors

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{4n-3}{4n+1} \cdot |x|^4 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|^4.$$

La convergence absolue aura lieu si $|x|^4 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$.

Pour $x > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = +\infty$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$ n'existe pas si $x < -1$.

Donc pour $|x| > 1$, la série diverge. Pour $x = \pm 1$, $u_n(\pm 1) = \frac{\pm 1}{4n-3}$

et $\sum_{n \geq 1} \frac{(\pm 1)}{4n-3}$ diverge. Pour la série des dérivées

$\sum u'_n(x) = \sum x^{4n-4}$, elle converge simplement sur $] -1, 1[$.

Mais comme $\sup_{[-a, a]} |x|^{4n-4} = |a|^{4n-4}$, alors on aura une convergence

normale (donc uniforme) sur tout intervalle $[-a, a] \subset]-1, 1[$, ($a < 1$).

Donc on peut dériver terme à terme en chaque point $x_0 \in]-1, 1[$

car $\forall x_0 \in]-1, 1[, \exists a \in]0, 1[$ tq $x_0 \in [-a, a]$. Ainsi on aura

$$S'_1(x) = \sum_{n \geq 1} x^{4n-4} = \sum_{m \geq 0} x^{4m} = \frac{1}{1-x^4} \quad (\text{en posant } m = n-1)$$

$$S'_1(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \frac{1/4}{1-x} + \frac{1/4}{1+x} + \frac{1/2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow S_1(x) = C + \frac{1}{4} \ln(1+x) - \frac{1}{4} \ln(1-x) + \frac{1}{2} \arctan x, \quad C = S_1(0) = 0.$$

$$\text{Donc } \boxed{S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3} = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2} \arctan x, \quad |x| < 1} \quad (5)$$

$$b) S_2(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Une étude pareille au cas précédent permet de dire qu'on peut dériver terme à terme (et intégrer aussi) dans l'intervalle $] -1, 1[$. Ainsi : $S_2'(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$

$$\Rightarrow S_2(x) = C + \arctan x \quad (\text{avec } C = S_2(0) = 0).$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall x \in]-1, 1[, S_2(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x}$$

$$c) S_3 = \sum_{n \geq 0} \frac{2n-1}{2^n}. \text{ On peut considérer } A(x) = \sum_{n \geq 0} (2n-1)x^n.$$

L'étude de cette dernière se fait comme les précédents, et on peut dériver terme à terme dans $] -1, 1[$. Alors :

$$A(x) = 2 \sum_{n \geq 0} n x^n - \sum_{n \geq 0} x^n = 2x \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right)' - \sum_{n \geq 0} x^n$$

$$A(x) = 2x \left(\frac{1}{1-x} \right)' - \frac{1}{1-x} = \frac{2x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{3x-1}{(1-x)^2}$$

$$\text{Donc } \boxed{S_3 = A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}-1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2}$$

$$d) S_4 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}. \text{ On considère } B(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^{2n+1} \quad (m \text{ procédé}).$$

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (\sqrt{x})^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan(\sqrt{x}) \quad (\text{en utilisant b/})$$

$$\Rightarrow S_4 = B\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{1/3}} \arctan(\sqrt{1/3}) = \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$\text{Or } \tan(\pi/6) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ donc}$$

$$\boxed{S_4 = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}}$$