Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2020/2021 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°1

Exercice 1 : Déterminer le terme général de chacune des séries numériques suivantes, dont les premiers termes sont écrits *in extenso* :

$$\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\cdots \quad , \quad 1+\frac{1.3}{1.4}+\frac{1.3.5}{1.4.7}+\frac{1.3.5.7}{1.4.7.10}+\cdots$$

$$2-\frac{3}{4}+\frac{4}{9}-\frac{5}{16}+\cdots \quad , \quad 2+\frac{1}{3}+4+\frac{1}{5}+6+\frac{1}{7}+\cdots$$

Exercice 2 : En utilisant le critère convenable de convergence, étudier les séries à termes positifs suivantes :

$$u_n=\prod_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{3k+2} \quad , \quad v_n=\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n \quad , \quad w_n=\frac{n!}{n^n} \quad , \quad \theta_n=\frac{1}{n\ln^2 n}$$

Exercice 3 : Étudier la convergence absolue, puis la semi-convergence éventuelle des séries suivantes :

$$u_n=(-1)^n n^a b^n \quad , \quad v_n=\frac{(-1)^n}{n^a} \quad , \quad w_n=\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

avec a, b deux paramètres réels.

Exercice 4 : Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence :

$$u_n=\frac{n^2}{2^n} \quad , \quad v_n=\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

Indication pour la deuxième : calculer d'abord $(\arctan(x+1)-\arctan x)$ en utilisant $\tan(a-b)$. Justifier tous les calculs.

Exercice 5 : (Comportement asymptotique de la série harmonique) Notons

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

la somme partielle de la série harmonique. On sait d'après le cours que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$. On veut déterminer un équivalent de S_n à l'infini.

1. Montrer que pour tout $x>0$ on a
$$\frac{1}{1+x}\leq \ln(x+1)-\ln x\leq \frac{1}{x}.$$
2. Posons $\theta_n=S_n-\ln n$. Montrer que la suite (θ_n) est convergente. (On notera γ sa limite, elle s'appelle "constante d'Euler" et vaut approximativement 0.577)
3. En déduire que $S_n=\ln n+\gamma+o(1)$.

Exercice 6 : Soit (a_n) une suite réelle décroissante.

1. Montrer que si la série $\sum a_n$ est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n=0$.
2. Que peut-on dire de la réciproque ?

Licence 2ème année - Semestre 3 - 2020/2021.

Module: « Analyse III » - Liste de T.D n° 1 - Corrigé.

Exercice 1: Dans cet exercice, on demande de proposer une formule pour le terme général de la série.

* $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\dots$: Les numérateurs $2,4,6,8,\dots$ forment une progression arithmétique de raison 2 puisque la différence de deux termes consécutifs est 2. La forme des numérateurs est donc: $2n+2$, $n\geq 0$.

Les dénominateurs $5,8,11,14,\dots$ forment aussi une progression arithmétique de raison 3, la forme est donc : $3n+5$, $n\geq 0$.

Conclusion: $\boxed{u_n=\frac{2n+2}{3n+5},\ n\geq 0}$

* $1+\frac{1.3}{1.4}+\frac{1.3.5}{1.4.7}+\frac{1.3.5.7}{1.4.7.10}+\dots$: Chaque numérateur est un produit de nombres impairs consécutifs : $\prod_{j=0}^{n}(2j+1)$, $n\geq 0$.

Les dénominateurs sont aussi de produits de termes d'une progression arithmétiques de raison 3 : $\prod_{j=0}^{n}(3j+1)$, $n\geq 0$

Conclusion: $\boxed{u_n=\prod_{j=0}^{n}\left(\frac{2j+1}{3j+1}\right),\ n\geq 0}$

* $2 - \frac{3}{4} + \frac{4}{9} - \frac{5}{16} + \cdots$: C'est une série alternée (+1 puis −1) donc les fractions sont multipliées par $(-1)^n$.

Les numérateurs sont les nombres entiers à partir de 2, et les dénominateurs les carrés de nombres entiers à partir de 1. Donc

$$\boxed{u_n = (-1)^n \frac{n+2}{(n+1)^2} \quad , \quad n \geq 0}$$

* $2 + \frac{1}{3} + 4 + \frac{1}{5} + 6 + \frac{1}{7} + \cdots$: Une première manière de faire est de grouper les termes deux par deux :

$$\underbrace{\left(2+\frac{1}{3}\right)}_{u_1} + \underbrace{\left(4+\frac{1}{5}\right)}_{u_2} + \underbrace{\left(6+\frac{1}{7}\right)}_{u_3} + \cdots$$

Ainsi $\boxed{u_n = 2n + \frac{1}{2n+1} \quad , \quad n \geq 1}$

Si on considère que chaque terme est "seul" terme de la série, ce sont les nombres entiers (à partir de 2) une fois avec la puissance 1 et après la puissance −1 (les puissances sont alternées). Ainsi $\boxed{u_n = (n+1)^{(-1)^{n-1}} \quad , \quad n \geq 1}$

<u>Exercice 2</u> : * $u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{2k+1}{3k+2}\right) \quad , n \geq 0.$

Comme l'expression de u_n est "multiplicative", alors le critère approprié (à première vue) est celui de d'Alembert.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \prod_{k=0}^{n+1} \frac{(2k+1)}{(3k+2)} \Big/ \prod_{k=0}^{n} \frac{(2k+1)}{(3k+2)} = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)+2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2/3 < 1$$

Donc la série $\sum u_n$ <u>converge</u>.

* $v_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$: Parfois, avant de s'engager dans l'application d'un critère, on vérifie si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ ou non.

Dans le cas présent on a :

$$v_n = \left(\frac{2n+1-2}{2n+1}\right)^n = \left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1/2}\right)^n$$

$$= \left(1-\frac{1}{n+1/2}\right)^{n+1/2} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1/2}\right)^{-1/2}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 1}$$

Maintenant la limite bien connue

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$$

permet de dire que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1/e \neq 0$, donc la série <u>diverge</u> car la condition nécessaire de convergence n'est pas satisfaite.

* $w_n = \frac{n!}{n^n}$, $n \geq 1$. Là aussi, la structure multiplicative de w_n, suggère d'utiliser le critère de d'Alembert :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = e^{-1} < 1$.

Donc la série <u>converge</u>.

* $\theta_n = \dfrac{1}{n \ln^2 n}$, $n \geq 2$. On applique la même méthode que dans le cours lors de l'étude de la série de Riemann. On considère ici la fonction $\varphi(t) = \dfrac{1}{t \ln^2 t}$ avec $t \in [2, +\infty[$. $\varphi'(t) = \dfrac{-(\ln^2 t + 2\ln t)}{t^2 \ln^4 t}$. Comme $t \geq 2$ alors $\ln t \geq \ln 2 > 0$ et donc $\varphi'(t) < 0$ dans $[2, +\infty[$ càd la fonction φ est décroissante. Si $k \leq t \leq k+1$, $k \geq 2$ alors $\dfrac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)} \leq \dfrac{1}{t \ln^2 t} \leq \dfrac{1}{k \ln^2 k}$, d'où par intégration dans l'intervalle $[k, k+1]$, on aura :

$$\frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln^2 t} \leq \frac{1}{k \ln^2 k}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)} \leq \left[\frac{-1}{\ln t}\right]_k^{k+1} \leq \frac{1}{k \ln^2 k}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)} \leq \frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} \leq \frac{1}{k \ln^2 k}, \ k \geq 2}$$

On somme cette double inégalité de $k=2$ à $k=n$ et posons $S_n = \sum_{k=2}^{n} \theta_k$; alors : $\boxed{S_n - \dfrac{1}{2\ln^2 2} \leq \dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln(n+1)} \leq S_n.}$

Avec l'inégalité de gauche on obtient :

$$S_n \leq \frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leq \frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2}.$$

Ce qui implique que la suite (S_n) (des sommes partielles) est <u>majorée</u>, comme elle est croissante (car $\theta_n \geq 0$), donc elle est convergente.

La série <u>converge</u>.

Exercice 3 : $\boxed{u_n = (-1)^n n^a . b^n}$; $n \geq 1$ (car a peut-être <0).

On a : $|u_n| = n^a . |b|^n = e^{a \ln n + n \ln|b|}$

. Si $|b|>1$, alors $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$, il y a divergence

de plus $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, il y a divergence aussi de $\sum u_n$.

. Si $|b|=1$, $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = \lim_{n\to+\infty} e^{a \ln n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a>0 \\ 1 & \text{si } a=0 \\ 0 & \text{si } a<0 \end{cases}$

donc il y aura divergence pour $a \geq 0$, car la condition nécessaire n'est pas satisfaite. Ici $|u_n| = \frac{1}{n^{-a}}$ donc convergence absolue ssi $-a > 1 \Leftrightarrow a < -1$

. Si $|b|<1$, $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, et là on peut faire l'étude de la convergence absolue, par le critère d'Alembert par exemple, ou même Cauchy : $|u_n|^{1/n} = e^{a \frac{\ln n}{n} + \ln|b|}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n} = |b| < 1$, donc il y a convergence absolue.

Conclusion 1 : La convergence absolue de la série aura lieu si et ssi $\begin{cases} |b|<1, \ \forall a \in \mathbb{R} \\ \text{ou bien} \\ |b|=1 \text{ et } a<-1 \end{cases}$

Les seuls cas où on pourrait avoir la semi-convergence, sont $b = \pm 1$ et selon a.

Pour $b=-1$, $u_n = n^a = \frac{1}{n^{-a}}$ cvge ssi $-a > 1 \Leftrightarrow a < -1$ et elle est absolue car $u_n > 0$.

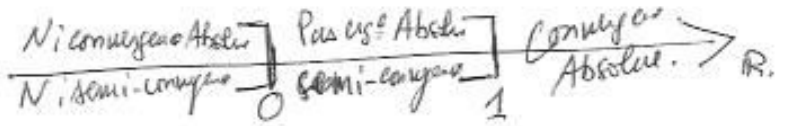
Pour $b=1$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{-a}}$, la convergence selon Abel ssi $-a > 0 \Leftrightarrow a < 0$, (semi-cvgence).

On résume tous les cas dans le tableau suivant ;

	$\lvert b\rvert<1$	$b=-1$	$b=1$	$\lvert b\rvert>1$
$a<-1$	Convergence Absolue	Convergence Absolue	Convergence Absolue.	Ni Cvg° Absolue Ni semi-convergence
$-1\leq a<0$	Convergence Absolue	Ni cvg° Absolue Ni semi-convergence	Semi-cvg° seulement.	Ni cvg° Absolue Ni semi-convergence
$a\geq 0$	Convergence Absolue.	Ni cvg° Absolue Ni semi-convergence.	Ni cvg° Absolue Ni semi-cvg°	Ni Cvg° Absolue Ni semi-cvg°.

$$\boxed{v_n = \frac{(-1)^n}{n^a}, \quad n \geq 1}$$

* $|v_n| = \frac{1}{n^a}$ cvge si et ssi $a > 1$, convergence Absolue. (critère de Riemann)
* Si $0 < a \leq 1$: il y a semi-convergence selon Abel.
* Si $a \leq 0$, $\lim_{n \to +\infty} v_n \neq 0$, donc pas de convergence.



$$w_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = (-1)^n \sin(1/n), \quad n \geq 1.$$

* $|w_n| = |\sin(1/n)| = \sin(1/n) \sim \frac{1}{n}$, donc pas de convergence Absolue.
* Avec le critère d'Abel, $\sum w_n$ est convergente (semi-convergence) car $\sin(1/n) \searrow$, > 0 et $\lim_{n \to +\infty} \sin(1/n) = 0$.

  et $\left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k\right| \leq 1$, $\forall n \geq 1$.

<u>Exercice 4</u> : Calcul de $S = \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{2^n}$.

Considérons $S(x) = \sum_{n \geq 1} n^2 x^n$, alors $S = S(1/2)$.

La convergence de $\sum n^2 x^n$ s'étudie par le critère de d'Alembert.

$u_n(x) = n^2 x^n \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 x\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |x|$, donc si $|x| < 1$ la convergence est assurée. Partons de $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$\Longrightarrow \sum_{n \geq 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Longrightarrow \sum_{n \geq 2} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

ou encore : $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} n^2x^n - \sum_{n\geq 0} nx^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} n^2x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

Et donc $\boxed{S = S(1/2) = \dfrac{\frac{1}{2}(1+1/2)}{(1-1/2)^3} = \dfrac{3/4}{1/8} = 6}$

$w_n = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$; $n\geq 0$. Calcul de $K = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$.

On sait que $\operatorname{arctg} t = t + t\,o(t)$, $t\to 0$ d'où $w_n \sim \frac{1}{n^2}$.

La convergence de la série s'en déduit.

On a $\operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$; d'où

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg}(x)\right) = \frac{x+1-x}{1+(x+1)x} = \frac{1}{x^2+x+1}$$

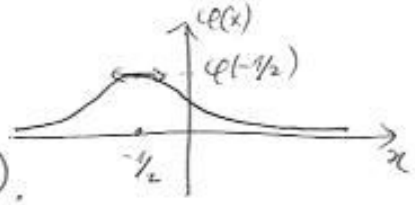
à condition de montrer que $\forall x$, $\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

Notons $\varphi(x) = \operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$.

On a $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+(x+1)^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{-2x-1}{(1+x^2)(1+(x+1)^2)}$

$$\begin{array}{ccccc} & + & 0 & - & \\ & & -1/2 & & \end{array}$$

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}$, $0 < \varphi(x) \leq \varphi(-1/2)$.



$\varphi(-1/2) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg}(-1/2) = 2\operatorname{arctg}(1/2)$.

Un calcul approché donne : $\varphi(-\frac{1}{2}) \cong 0{,}93$ et $\frac{\pi}{2} \simeq 1{,}57$.

Donc on a bien $\varphi(x) \in \left]0, \pi/2\right[$.

D'après ce qui précède :

$$\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right).$$

Donc $w_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n$.

$$\Longrightarrow W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg} k\right)$$

$$W_n = \operatorname{arctg}(n+1) \Longrightarrow \boxed{K = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}(n+1) = \pi/2}$$

<u>Exercice 5</u> : 1°/ Montrons que $\forall x>0$, $\frac{1}{1+x} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq 1/x$.

On peut montrer cette double inégalité à l'aide du théorème des accroissements finis (par exemple). Considérons $\varphi(t) = \ln t$, $t \in [x, x+1]$ ($x>0$ fixé).

D'après le th. A.F on a : $\varphi(x+1) - \varphi(x) = \varphi'(c)$, $x < c < x+1$

$\Longrightarrow \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}$. Or $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$, d'où le résultat.

2°/ L'application de la double inégalité donne

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{1}{1+k} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

Par sommation de 1 à n-1 on trouve :

$$S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_{n-1}$$

$$\text{ou} \quad S_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq S_n.$$

Considérons $\theta_n = S_n - \ln n$. Alors $\theta_{n+1} - \theta_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \leq 0$

Donc la suite (θ_n) est décroissante. De plus

$0 \leq \ln(n+1) - \ln n \leq S_n - \ln n = \theta_n$ montre que θ_n est minorée. Donc (θ_n) est convergente. Notons γ sa limite : $\lim_{n\to+\infty} (S_n - \ln n) = \gamma$.

3°/ Posons $\tau_n = S_n - \ln n - \gamma$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = 0 \Rightarrow \tau_n = o(1)$

$$\text{cf } \boxed{S_n = \ln n + \gamma + \tau_n}.$$

Exercice 6 : Hypothèses : • (a_n) décroissante.
• $\sum a_n$ converge.

Problème : $\lim_{n\to+\infty} n a_n = 0$?

1/. Remarquons d'abord que la convergence de la série $\sum a_n$, implique que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Mais comme (a_n) est décroissante, alors forcément $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0}$. Car sinon, $\exists n_0$ tq $a_{n_0} < 0$. Mais alors $\forall n > n_0$, $a_n \leq a_{n_0} < 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \leq a_{n_0}$, ce qui contredit le fait que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

• Rappelons un (petit) résultat sur les suites, facile à établir. Si (b_n) est une suite telle que $\lim_{k\to+\infty} b_{2k} = \ell = \lim_{k\to+\infty} b_{2k+1}$ Alors $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$.

• Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe, donc la suite (S_n) est de Cauchy. On a :

$$S_{2k} - S_k = \sum_{j=k+1}^{2k} a_j \geq k a_{2k} \quad \text{(par la décroissance)}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq (2k) a_{2k} \leq 2(S_{2k} - S_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

car (S_n) est de Cauchy

Aussi $S_{2k+1} - S_k = \sum_{j=k+1}^{2k+1} a_j \geq (k+1) a_{2k+1}$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq (2k+1) a_{2k+1} \leq \frac{2k+1}{k+1}(S_{2k+1} - S_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

En définitive $\lim_{k\to+\infty} 2k a_{2k} = 0 = \lim_{k\to+\infty} (2k+1) a_{2k+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n a_n = 0$.

2/ La réciproque. Hypothèses : (a_n) décroissante + $\lim_{n\to+\infty} n a_n = 0$
Problème : $\sum a_n$ converge ?

La réponse est non en général. Contre-exemple : $a_n = \frac{1}{n \ln n}$, $\sum a_n$ div et pourtant $a_n \searrow$ et $\lim_{n\to+\infty} n a_n = 0$.