Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2020/2021 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°1

Exercice 1 : Déterminer le terme général de chacune des séries numériques suivantes, dont les premiers termes sont écrits *in extenso* :

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \dots, \quad 1 + \frac{1.3}{1.4} + \frac{1.3.5}{1.4.7} + \frac{1.3.5.7}{1.4.7.10} + \dots$$

$$2 - \frac{3}{4} + \frac{4}{9} - \frac{5}{16} + \dots, \quad 2 + \frac{1}{3} + 4 + \frac{1}{5} + 6 + \frac{1}{7} + \dots$$

Exercice 2 : En utilisant le critère convenable de convergence, étudier les séries à termes positifs suivantes :

$$u_n = \prod_{k=0}^n \frac{2k+1}{3k+2}, \quad v_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^n, \quad w_n = \frac{n!}{n^n}, \quad \theta_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$$

Exercice 3 : Étudier la convergence absolue, puis la semi-convergence éventuelle des séries suivantes :

$$u_n = (-1)^n n^a b^n, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n^a}, \quad w_n = \sin \left(\frac{(-1)^n}{n} \right)$$

avec a, b deux paramètres réels.

Exercice 4 : Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence :

$$u_n = \frac{n^2}{2^n}, \quad v_n = \arctan \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right).$$

Indication pour la deuxième : calculer d'abord $(\arctan(x+1) - \arctan x)$ en utilisant $\tan(a-b)$. Justifier tous les calculs.

Exercice 5 : (Comportement asymptotique de la série harmonique) Notons

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

la somme partielle de la série harmonique. On sait d'après le cours que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$. On veut déterminer un équivalent de S_n à l'infini.

1. Montrer que pour tout $x > 0$ on a

$$\frac{1}{1+x} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}.$$

2. Posons $\theta_n = S_n - \ln n$. Montrer que la suite (θ_n) est convergente. (On notera γ sa limite, elle s'appelle "constante d'Euler" et vaut approximativement 0.577)

3. En déduire que $S_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 6 : Soit (a_n) une suite réelle décroissante.

1. Montrer que si la série $\sum a_n$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0$.

2. Que peut-on dire de la réciproque ?

Bibliographie

1. Mathématiques TOUT-EN-UN ; 2ème année, C.Deschamps et A.Varusfel, Edition Dunod.
2. Analyse PC-PSI-PT (cours+exercices) ; J.M.Monier, Edition Dunod.
3. Analyse, Exercices et Problèmes ; M.Gaultier, Edition Dunod.
4. Analyse 2ème année, Exercices corrigés ; D.Prochasson, Edition Dunod.
5. A problem book in Mathematical Analysis ; G.N.Berman, Edition Mir (Moscou).
6. Le succès en Analyse ; A.Elkaabouchi et D.Essayed, Edition Ellipse.