Chapitre 5

Intégrales impropres

5.1 Motivation - Définitions

Dans cette section nous présenterons d'abord des définitions nécessaires pour donner un sens à des intégrales du genre

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \text{ou} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

ou bien

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

avec f une fonction non bornée au voisinage de a, ou de b, ou les deux à la fois. On peut citer à titre d'exemple $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ ou $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ax}\,dx$.

Définition 5.1.0.1 *Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ (a,b pouvant être $\pm\infty$). On dit que f est* <u>*localement intégrable*</u> *si elle est intégrable sur tout intervalle fermé borné $[c,d] \subset]a,b[$.*

Exemple 5.1.0.2 *Les deux fonctions données plus haut sont localement intégrables dans $]0,1]$ et $[0,+\infty[$ respectivement puisqu'elles sont continues sur ces deux intervalles, et que toute fonction continue sur un intervalle borné y est intégrable.*

Définition 5.1.0.3 *Soit $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable et soit $\lambda \in [a,b[$. Supposons que*

$$\lim_{\substack{\lambda \longrightarrow b \\ <}} \int_a^\lambda f(x)\,dx$$

existe. On définit dans ce cas

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\lambda \longrightarrow b \\ <}} \int_a^\lambda f(x)\,dx$$

et on dit que l'intégrale sur $[a,b[$ est impropre en b et qu'elle est convergente. De manière similaire on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\lambda \longrightarrow a \\ >}} \int_\lambda^b f(x)\,dx$$

pour impropre en a ; et

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\lambda \underset{<}{\rightarrow} b \\ \mu \underset{>}{\rightarrow} a}} \int_\mu^\lambda f(x)\,dx$$

pour impropre en a et b. Si les limites en question n'existent pas (ou sont ∞) on dira que ces intégrales divergent.

Exemple 5.1.0.4 $\quad * \displaystyle\int_0^\lambda e^{-x}\,dx = 1 - e^{-\lambda}$ *d'où*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{\lambda \to +\infty} \left(1 - e^{-\lambda}\right) = 1$$

C'est une intégrale impropre (à cause de $+\infty$) convergente.

$* \displaystyle\int_\lambda^1 \ln x\,dx = [x \ln x - x]_\lambda^1 = -1 - \lambda \ln \lambda + \lambda$. *D'où*

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\lambda \underset{>}{\rightarrow} 0} \int_\lambda^1 \ln x\,dx = \lim_{\lambda \underset{>}{\rightarrow} 0} [-1 - \lambda \ln \lambda + \lambda] = -1$$

C'est donc une intégrale impropre en 0 *qui est convergente.*

Remarque 5.1.0.5 *Si une intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *est impropre en a et b, on peut la scinder en la somme de deux intégrales impropres mais en un point seulement*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

grâce à la relation de Chasles. Désormais, nous développerons la théorie avec un point singulier.

Nous allons donner maintenant une condition nécessaire et suffisante de convergence semblable au caractère de Cauchy pour les suites réelles.

Théorème 8 *Une intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *impropre en b uniquement est convergente si et seulement si*

$$\lim_{\mu,\lambda \underset{<}{\rightarrow} b} \int_\mu^\lambda f(x)\,dx = 0$$

ou de manière équivalente

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha_\varepsilon \in]a, b[\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \left[\alpha_\varepsilon < \mu < \lambda < b \Longrightarrow \left|\int_\mu^\lambda f(x)\,dx\right| \leq \varepsilon\right]$$

Démonstration : Posons
$$F(\lambda)=\int_a^\lambda f(x)\,dx.$$
Alors la convergence de l'intégrale impropre signifie tout simplement l'existence de la limite $\lim\limits_{\substack{\lambda\to b\\ <}} F(\lambda)$. Or un résultat de première année affirme que l'existence d'une telle limite est équivalente à l'existence de la limite de la suite $(F(\lambda_n))$ où (λ_n) est une suite quelconque convergente vers b avec $\lambda_n<b$. A présent il faut se rappeler qu'une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy. Remarquons en passant que
$$\int_\mu^\lambda f(x)\,dx = F(\lambda)-F(\mu).$$
■

Exemple 5.1.0.6 *Montrons, par la condition de Cauchy donnée dans le précédent théorème, que l'intégrale* $I=\int_0^1 \frac{dx}{x}$ *est divergente. Nous devons donc utiliser la négation de l'assertion donnée dans le théorème, à savoir*
$$\exists\varepsilon_0>0\quad \forall\alpha\in\,]0,1[\quad \exists\lambda_\alpha,\mu_\alpha\in\mathbb{R}\quad \left[0<\mu_\alpha<\lambda_\alpha<\alpha\quad \textit{et}\quad \left|\int_{\mu_\alpha}^{\lambda_\alpha}\frac{1}{x}\,dx\right|>\varepsilon_0\right]$$
Sachant que $\int_{\mu_\alpha}^{\lambda_\alpha}\frac{1}{x}\,dx=\ln\lambda_\alpha-\ln\mu_\alpha=\ln\left(\frac{\lambda_\alpha}{\mu_\alpha}\right)$, *alors les choix* $\lambda_\alpha=\alpha/2$, $\mu_\alpha=\alpha/3$ *et* $\varepsilon_0=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ *conviennent pour notre affirmation.*

5.2 Un exemple fondamental

Soit $\rho(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ avec $x>0$ et $\alpha>0$. C'est le modèle de Riemann dans le cas continu semblable aux séries de Riemann dans le cas discret.

On a le résultat suivant :

* L'intégrale $\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha}$ impropre en 0 converge si et seulement si $\alpha<1$ (et diverge donc si $\alpha\geq 1$).
* L'intégrale $\int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ impropre en $+\infty$ converge si et seulement si $\alpha>1$ (et diverge donc si $\alpha\leq 1$).

Démonstration :

- Pour la première intégrale, prenons $0 < \lambda < b$ et $\alpha \neq 1$ alors

$$F(\lambda) = \int_\lambda^b \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\lambda^b = \frac{b^{1-\alpha} - \lambda^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

  Donc

  * Si $\alpha < 1$ alors $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ >}} F(\lambda) = \dfrac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
  * Si $\alpha > 1$ alors $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ >}} F(\lambda) = +\infty$

  et pour $\alpha = 1$ on a $F(\lambda) = \ln b - \ln \lambda \xrightarrow[\lambda \to 0^+]{} +\infty$.

- Pour la deuxième intégrale, prenons $\lambda > b$ et $\alpha \neq 1$ alors

$$F(\lambda) = \int_b^\lambda \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_b^\lambda = \frac{\lambda^{1-\alpha} - b^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

  Donc

  * Si $\alpha > 1$ alors $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) = \dfrac{-b^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
  * Si $\alpha < 1$ alors $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) = +\infty$

  et pour $\alpha = 1$ on a $F(\lambda) = \ln \lambda - \ln b \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} +\infty$.

■

5.3 Critère de comparaison

Soient f et g deux fonctions positives définies sur $[a, b[$ dont on suppose les intégrales impropres en b. Nous allons donner un critère de comparaison, comparable à celui donné pour les séries à termes positifs, permettant de conclure dans une majorité de cas.

On suppose que $\forall x \in [a, b[\quad f(x) \leq g(x)$, alors

Si $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ converge Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ converge aussi,

et Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ diverge Alors $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ diverge aussi.

Démonstration : Pour montrer la première affirmation, grâce à la propriété de "croissance" de l'intégrale, on peut écrire

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \Longrightarrow 0 \leq \int_{\mu}^{\lambda} f(x)\, dx \leq \int_{\mu}^{\lambda} g(x)\, dx.$$

Après, à l'aide de la condition de Cauchy donnée dans le Théorème 8 on a bien

$$\lim_{\substack{\mu,\lambda \to b \\ <}} \int_{\mu}^{\lambda} g(x)\, dx = 0 \Longrightarrow \lim_{\substack{\mu,\lambda \to b \\ <}} \int_{\mu}^{\lambda} f(x)\, dx = 0.$$

Pour la divergence et toujours avec le même Théorème 8 utilisé dans le sens négatif, on a

$$\int_{\mu_\alpha}^{\lambda_\alpha} f(x)\, dx \geq \varepsilon_0 \Longrightarrow \int_{\mu_\alpha}^{\lambda_\alpha} g(x)\, dx \geq \varepsilon_0.$$

■

Exemple 5.3.0.1 $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ *est convergente. En effet,*

$$x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x \Rightarrow 0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

et $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ *converge puisque*

$$\int_1^{\lambda} e^{-x} dx = e^{-1} - e^{-\lambda} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} e^{-1}.$$

Conséquence : Soit $f(x) \geq 0$ sur $[a, +\infty[\quad (a > 0)$.

- Si pour un certain $\alpha > 1$ on a $x^\alpha f(x) \leq M$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge. En particulier si $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = A$ existe.
- Si pour un certain $\alpha \leq 1$ on a $x^\alpha f(x) \geq m > 0$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge. En particulier si $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = B > 0$ existe.

Cette conséquence est une version continue (quand le caractère impropre est en $+\infty$) du critère de Riemann énoncé pour les séries. La démonstration s'appuie sur le critère de comparaison donné plus haut. En effet, pour $\alpha > 1$ on a $f(x) \leq \dfrac{M}{x^\alpha}$ et alors l'exemple fondamental permet de conclure. Dans le cas particulier de l'existence de la limite, et pour x assez grand on a $x^\alpha f(x) \leq A + \varepsilon$, et on retrouve le cas précédent.

Ensuite pour $\alpha \leq 1$, on aura $f(x) \geq \dfrac{m}{x^\alpha}$ et on utilise l'exemple fondamental. Le cas particulier de l'existence de la limite donne pour x assez grand $x^\alpha f(x) \geq B - \varepsilon$ où on choisit $0 < \varepsilon < B$. A noter que des résultats pareils peuvent être formulés au voisinage d'un point b en utilisant l'exemple fondamental.

Exemple 5.3.0.2 1. *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$ *est convergente. Remarquons d'abord qu'elle n'est pas impropre en* 0 *puisque la fonction* $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ *est prolongeable par continuité en* 0*. En effet*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

existe bien. Donc l'intégrale en question est impropre uniquement en $+\infty$*. Il est facile de voir que sur* $[0, +\infty[$ *on a* $x^2 f(x) = 1 - \cos x \leq 2$*. Le premier point dans la conséquence précédente permet de conclure. Remarquons en passant que* $\lim\limits_{x\to 0} x^2 f(x)$ *n'existe pas !*

2. *Nous allons revisiter l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx$ *qu'on a étudié plus haut et montré qu'elle était convergente. Pour appliquer la comparaison, considérons la fonction* $f(x) = -\ln x$ *qui est positive dans l'intervalle* $]0, 1]$ *. On sait que*

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -\sqrt{x}\ln x = 0$$

D'après la définition de la notion de limite,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad , \quad 0 < x < \delta_\varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon \leq -\sqrt{x}\ln x \leq \varepsilon$$

en particulier

$$0 < -\ln x \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{x}}.$$

On conclut à la convergence grâce à la comparaison et l'exemple fondamental au voisinage de 0 *avec* $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$*.*

5.4 Convergence absolue

Définition 5.4.0.1 1. *On dit qu'une intégrale impropre est* <u>*absolument convergente*</u> *si et seulement si l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b |f(x)| \, dx$ *est convergente.*

2. *Si* $\displaystyle\int_a^b |f(x)| \, dx$ *diverge et* $\displaystyle\int_a^b f(x) \, dx$ *converge on dit que cette dernière est* <u>*semi-convergente*</u>*.*

Théorème 9 *La convergence absolue implique la convergence. L'inverse est faux en général.*

Démonstration : Soit f une fonction définie et localement intégrable sur l'intervalle $[a, b[$. On suppose que le caractère impropre de son intégrale est en b. L'hypothèse du théorème est que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\, dx$ est convergente. Nous allons montrer la convergence de l'intégrale de f (sans la valeur absolue) par la condition de Cauchy donnée par le Théorème 8. On sait que

$$0 \leq |\int_\mu^\lambda f(x)\, dx| \leq \int_\mu^\lambda |f(x)|\, dx$$

Puisque nous avons supposé la convergence absolue, alors (par le même Théorème 8) on a

$$\lim_{\mu,\lambda \underset{<}{\longrightarrow} b} \int_\mu^\lambda |f(x)|\, dx = 0$$

D'où

$$\lim_{\mu,\lambda \underset{<}{\longrightarrow} b} \int_\mu^\lambda f(x)\, dx = 0$$

■

Exemple 5.4.0.2 *Nous allons montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ *est semi-convergente. Remarquons tout d'abord qu'elle n'est pas impropre en* 0 *puisque la fonction sous l'intégrale est prolongeable par continuité en* 0 *car* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$*. Après, on a grâce à une intégration par parties*

$$\int_0^\lambda \frac{\sin x}{x}\, dx = \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_0^\lambda + \int_0^\lambda \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = \frac{1-\cos\lambda}{\lambda} + \int_0^\lambda \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$$

Maintenant $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1-\cos\lambda}{\lambda} = 0$ *et l'intégrale restante est convergente (déjà étudiée dans un exemple précédent).*
Montrer qu'elle n'est pas absolument convergente est un peu plus délicat. Cela passe par le fait que $|\sin x|$ *est* π*-périodique. En effet,*

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$$

avec la relation de Chasles. Dans chacune de ces intégrale posons $x = t + k\pi$*, alors*

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+k\pi}\, dt \geq \frac{1}{\pi + k\pi} \int_0^\pi \sin t\, dt = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

et donc

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Sachant que la série harmonique $\sum \frac{1}{m}$ *diverge vers* $+\infty$*, on déduite que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = +\infty$$

5.5 Critère d'Abel

Nous allons énoncer et montrer un critère d'Abel comparable à celui des séries de termes quelconques. Mais avant, nous allons donner quelques outils nécessaires pour la suite.

5.5.1 Première formule de la moyenne

Proposition 5.5.1.1 *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et soit* $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction intégrable positive. Alors* $\exists c \in [a,b]$ *tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx.$$

Démonstration : Puisque f est continue sur un intervalle fermé-borné, alors elle admet une borne inférieure et une borne supérieure

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \qquad , \qquad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Maintenant la positivité de g fait que

$$\forall x \in [a,b] \qquad m \leq f(x) \leq M \Longrightarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

et

$$m \int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\, dx \leq M \int_a^b g(x)\, dx.$$

Si $\int_a^b g(x)\, dx = 0$ alors l'égalité annoncée est vérifiée. Sinon, $\int_a^b g(x)\, dx > 0$ et on peut écrire

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx} \leq M.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires $\exists c \in [a,b]$ tel que

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx} = f(c)$$

d'où le résultat. ■

5.5.2 Deuxième formule de la moyenne

Proposition 5.5.2.1 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, décroissante et de classe C^1, et soit $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $\exists c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx.$$

Démonstration : Posons $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$. Alors manifestement G est continue et $G' = g$ avec $G(a) = 0$. Notons

$$m_G = \inf_{x\in[a,b]} G(x) \qquad , \qquad M_G = \sup_{x\in[a,b]} G(x).$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)G'(x)\,dx &= [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx \\ &= f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx.\end{aligned}$$

On a d'une part

$$m_G f(b) \le f(b)G(b) \le M_G f(b) \qquad (*)$$

et ce, par la positivité de f et les définitions de m_G et de M_G. D'autre part,

$$m_G(f(a) - f(b)) = -m_G \int_a^b f'(x)\,dx \le -\int_a^b f'(x)G(x)\,dx$$

puisque $m_G \le G(x)$ et $-f'(x) \ge 0$ car f, de classe C^1, est décroissante. On continue la majoration avec $G(x) \le M_G$ et on obtient

$$m_G(f(a) - f(b)) \le -\int_a^b f'(x)G(x)\,dx \le M_G(f(a) - f(b)) \qquad (**)$$

En additionnant $(*)$ et $(**)$ on arrive à

$$m_G f(a) \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M_G f(a).$$

Si $f(a) = 0$, alors $f = 0$ et l'égalité annoncée est vraie. Sinon, on divise par $f(a)$ et on utilise le théorème des valeurs intermédiaires à G pour arriver au résultat. ■

5.5.3 Critère d'Abel

Théorème 10 *Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et soit $g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^0. Supposons que*

- *f est décroissante et $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = 0$*
- *$\exists M > 0 \ \ \forall \lambda \in [a, b[\ \ , \ |\int_a^\lambda g(x)\, dx| \leq M$*

Alors $\int_a^b f(x)g(x)\, dx$ converge.

Démonstration : La preuve s'appuie essentiellement sur la condition de Cauchy (voir Théorème 8) pour la convergence d'intégrales impropres. Remarquons que les conditions imposées à f impliquent qu'elle est forcément positive.
Soient $a < \mu < \lambda < b$. On peut donc appliquer la deuxième formule de la moyenne dans l'intervalle $[\mu, \lambda]$ et cela donne

$$\exists c \in [\mu, \lambda] \quad , \quad \int_\mu^\lambda f(x)g(x)\, dx = f(\mu) \int_\mu^c g(x)\, dx$$

et

$$|\int_\mu^\lambda f(x)g(x)\, dx| = f(\mu)|\int_\mu^c g(x)\, dx| = f(\mu)|\int_a^c g(x)\, dx - \int_a^\mu g(x)\, dx| \leq 2Mf(\mu)$$

Quand $\mu \underset{<}{\to} b$ alors $\lambda \underset{<}{\to} b$ d'où

$$\lim_{\substack{\mu \to b \\ <}} f(\mu) = 0 \Longrightarrow \lim_{\substack{\mu, \lambda \to b \\ <}} \int_\mu^\lambda f(x)g(x)\, dx = 0.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Exemple 5.5.3.1

1. *Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, décroissante et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Alors $\forall \xi \neq 0$ l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)e^{ix\xi}$ converge. En effet, il n'y a qu'à vérifier l'hypothèse sur la fonction $g(x) = e^{ix\xi}$. On a*

$$\int_a^\lambda e^{ix\xi}\, dx = \left[\frac{e^{ix\xi}}{i\xi}\right]_a^\lambda = \frac{e^{i\lambda\xi} - e^{ia\xi}}{i\xi} \Longrightarrow |\int_a^\lambda e^{ix\xi}\, dx| \leq \frac{2}{|\xi|}(= M)$$

2. *L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$ converge pour tout $\alpha > 0$. Ici $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est de classe C^1 et tend vers 0 à l'infini. Pour $g(x) = \sin x$ on a*

$$|\int_1^\lambda \sin x\, dx| = |\cos 1 - \cos \lambda| \leq 2.$$

Exemple 5.5.3.2 *On appelle intégrales de Fresnel les deux intégrales*

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx \qquad et \qquad J = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$$

En posant le changement de variable $x^2 = t$ on aura

$$K = I + iJ = \int_0^{+\infty} e^{ix^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{2\sqrt{t}}\, dt = \underbrace{\int_0^a \frac{e^{it}}{2\sqrt{t}}\, dt}_{A} + \underbrace{\int_a^{+\infty} \frac{e^{it}}{2\sqrt{t}}\, dt}_{B}$$

L'intégrale A, impropre en 0 est absolument convergente grâce à l'exemple fondamental. Pour B elle converge par le critère d'Abel. Donc I et J convergent.