Chapitre 1

Séries Numériques

1.1 Généralités

Une *série numérique*, notée $\sum u_n$, est la donnée d'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec laquelle on veut donner un sens à la somme infinie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

<u>Vocabulaire</u> :

1. u_n s'appelle le terme général de la série.
2. $U_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$ s'appelle somme partielle d'ordre (ou de rang) N.
3. Si la limite $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} U_N$ existe, on dit alors que la série converge et cette limite s'appelle somme de la série. On note
$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)$$
4. Si par contre cette limite n'existe pas ou est infinie, on dit alors que la série diverge.

Remarque 1.1.1 *Les qualités de convergence ou de divergence ne changent pas si on enlève de la somme partielle un nombre fini de termes.*

Exemple 1.1.2 *Voyons le cas d'un terme constant $u_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Les calculs sont faciles à mener*
$$U_N = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = N + 1$$
d'où $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} U_N = +\infty$, et donc la série diverge. Une autre valeur de la constante donnera le même résultat, sauf la valeur 0 qui donne une série convergente de somme égale à 0.

Exemple 1.1.3 *Considérons à présent* $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$. *On peut décomposer en éléments simples cette fraction*

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

et de là

$$V_N = \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right)$$

$$V_N = 1 - \frac{1}{N+1}$$

D'où $\lim_{N \to +\infty} V_N = 1$. *Ainsi cette série est convergente de somme égale à* 1. *On écrit*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

1.2 Condition nécessaire de convergence

Proposition 1.2.1 *Si la série* $\sum u_n$ *converge, alors* $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Démonstration : Supposons que la série converge, c'est-à-dire $\lim_{N \to +\infty} U_N = S$ existe. Comme $u_n = U_n - U_{n-1}$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} (U_n - U_{n-1}) = S - S = 0$$

■

Cette proposition permet de reconnaitre les séries divergentes. En effet, par la contraposée, si $\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$ alors la série est divergente. Comme illustration on peut revenir au premier exemple. En voici un autre :

Exemple 1.2.2 *Si* $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n} \right)^n$, *alors* $\lim_{n \to +\infty} u_n = e \neq 0$. *Donc la série* $\sum \left(1 + \dfrac{1}{n} \right)^n$ *diverge.*

Remarque 1.2.3 *ATTENTION ! La proposition précédente n'est qu'une implication et pas une équivalence. Cela veut dire que si* $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$, *alors on ne peut rien dire quant à la convergence (ou la divergence) de la série. Nous verrons plus loin des exemples dans ce sens.*

1.3 Séries à termes positifs

Dans cette section on étudiera les séries à terme général positif i.e, $u_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Leur étude préside, comme on le verra, à celle de tous les autres types de séries.

Proposition 1.3.1 *Si la série $\sum u_n$ est à termes positifs, alors la suite des sommes partielles $(U_n)_{n\geq 0}$ est croissante. Si de plus $(U_n)_{n\geq 0}$ est majorée alors la série est convergente.*

Démonstration : A partir de $U_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} u_j$ on peut écrire

$$U_{n+1} - U_n = (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n+1}) - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = u_{n+1} \geq 0.$$

Ceci est exactement la croissance de la suite des sommes partielles. Si elle est de plus majorée ($\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \ U_n \leq M$), alors elle converge grâce à un théorème démontré en Analyse 1 (première année). ■

Exemple 1.3.2 *Comme application de cette proposition, montrons que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \geq 1$ est convergente. Il est facile d'établir que pour $n \geq 2$ on a $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$. Et par suite $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$. D'où*

$$U_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

et donc

$$U_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

Ainsi la suite des sommes partielles est croissante majorée par 2, donc est convergente.

Proposition 1.3.3 *(Critère de comparaison) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \geq n_0 \quad , \quad u_n \leq v_n$$

Alors :

- *Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge aussi,*
- *Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge aussi.*

Démonstration : On démarre de $\forall\, k \geq n_0\, , u_k \leq v_k$. Par sommation sur k de n_0 à n on obtient

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{n} v_k$$
$$\Leftrightarrow \quad U_n - U_{n_0-1} \leq V_n - V_{n_0-1}$$

* Supposons que la série $\sum v_n$ converge. Cela veut dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ existe. Or c'est une suite croissante, donc sa limite est sa borne supérieure i.e, $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \sup\limits_{n\geq n_0} V_n = S$. On en déduit que

$$U_n \leq U_{n_0-1} + S - V_{n_0-1}$$

  C'est-à-dire que la suite des sommes partielles (U_n) est majorée à son tour. Elle est donc convergente puisqu'elle est déjà croissante.

* Supposons enfin que $\sum u_n$ diverge. Sa suite des sommes partielles étant croissante, la divergence implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$; et comme $U_n - U_{n_0-1} \leq V_n - V_{n_0-1}$ alors on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$.

■

Exemple 1.3.4 *Montrons que la série* $\sum \dfrac{1}{n!}$ *est convergente. En effet, il est facile de montrer par récurrence que* $\forall\, n \geq 4\ ,\ n! \geq n^2$. *Cela donne qu'à partir de* $n = 4$ *on a l'inégalité* $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{n^2}$. *Comme nous avons déjà démontré que la série* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *est convergente, alors* $\sum \dfrac{1}{n!}$ *est convergente aussi.*

Voici maintenant une variante parfois utile de la proposition précédente.

Proposition 1.3.5 *(Critère de comparaison bis) Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes strictement positifs à partir d'un certain rang. On suppose qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n \geq n_0 \quad , \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Alors :

* *Si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge aussi,*
* *Si* $\sum u_n$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *diverge aussi.*

Démonstration : A partir de

$$\forall k \geq n_0 \quad , \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{v_{k+1}}{v_k},$$

on multiplie les inégalités membre à membre de $k = n_0$ jusqu'à $k = n - 1$. On obtient

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} \leq \frac{v_n}{v_{n_0}} \Longrightarrow u_n \leq C v_n$$

$C = \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$ étant une constante. On utilise alors la comparaison telle qu'énoncée dans la proposition 1.3.3. ■

Proposition 1.3.6 *(Critère de l'équivalence) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On dit que les termes généraux sont équivalents à l'infini (noté $u_n \sim v_n$), si*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Dans ce cas, les deux séries convergent simultanément, ou bien divergent simultanément.

Démonstration : La condition d'équivalence s'écrit ainsi

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |\frac{u_n}{v_n} - 1| \leq \varepsilon$$

En fixant $\varepsilon \in]0, 1[$, la dernière inégalité dit qu'à partir de n_ε, on a

$$(1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n$$

Maintenant le critère de comparaison permet de donner la conclusion escomptée. ■

Exemple 1.3.7 *Étudions la convergence de la série de terme général $u_n = 1 - \cos(1/n)$. Il est d'abord clair que le terme général est positif. Ensuite*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = 1/2$$

(étudiée et démontrée en première année) permet de dire que $u_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$, d'où la convergence.

1.4 Deux modèles fondamentaux

1.4.1 Modèle d'une série géométrique, $u_n = q^n \, , q \geq 0$.

Examinons d'abord la condition nécessaire de convergence, car si elle n'est pas vérifiée il y aura divergence.

- ☐ Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ et donc la série diverge.
- ☐ Si $q = 1$, alors $q^n = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$ et donc la série diverge aussi.
- ☐ Si $q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. Mais cette égalité seule ne permet pas de conclure comme affirmé auparavant. Il faut examiner les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1}{1-q}$ et la série est convergente. On écrit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

1.4.2 Modèle d'une série de Riemann, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.

On peut évacuer tout d'abord les cas $\alpha \leq 0$ puisque le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge. Nous allons, à l'aide d'intégrales, encadrer les sommes partielles $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$. Partons de la qualité de décroissance sur $[1, +\infty[$ de la fonction réelle $t \mapsto t^{-\alpha}$. Si donc $k \leq t \leq k+1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

et par intégration sur $[k, k+1]$ on aura

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \qquad (*)$$

La discussion selon les valeurs de α tourne autour de trois cas : $\alpha > 1$, $\alpha = 1$ et $0 < \alpha < 1$.

□ <u>Cas $\alpha > 1$:</u> Le calcul de l'intégrale dans $(*)$ donne

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_k^{k+1} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right]$$

En faisant la somme de copies de $(*)$ pour $k = 1$ jusqu'à $k = n-1$ on obtient

$$U_n - 1 \leq \frac{1}{\alpha - 1}\left[1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right] \leq U_{n-1}$$

Puisque $1 - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} < 1$, alors l'inégalité de gauche donne

$$U_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}.$$

C'est-à-dire que la suite des somme partielles est majorée. Donc la série converge dans ce cas.

□ <u>Cas $\alpha = 1$:</u> Maintenant le calcul de l'intégrale donne

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \ln(k+1) - \ln k$$

Le procédé de sommation utilisé précédemment donne

$$U_n - 1 \leq \ln n \leq U_{n-1}.$$

A présent c'est l'inégalité de droite qui donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_{n-1} = +\infty$. La série est divergente dans ce cas.

☐ Cas $0 < \alpha < 1$: Le calcul est identique à celui du premier cas, sauf qu'il faut écrire le résultat dans le bon sens

$$U_n - 1 \leq \frac{1}{1-\alpha}\left[n^{1-\alpha} - 1\right] \leq U_{n-1}.$$

L'inégalité de droite donne $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n-1} = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left[n^{1-\alpha} - 1\right] = +\infty$. La série est divergente dans ce cas.

Conclusion : On résume les résultats concernant ces deux modèles ainsi

* La série $\sum q^n$ avec $q \geq 0$ converge si et seulement si $0 \leq q < 1$ (et diverge donc si $q \geq 1$).
* La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ (et diverge donc si $\alpha \leq 1$).

1.5 Critères classiques de convergence

Proposition 1.5.1 *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

1. *(Critère de d'Alembert) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ alors la série converge si $l < 1$ et diverge si $l > 1$. Dans le cas $l = 1$ ce critère ne permet pas de conclure.*

2. *(Critère de Cauchy) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = l$ alors la série converge si $l < 1$ et diverge si $l > 1$. Dans le cas $l = 1$ ce critère ne permet pas de conclure.*

3. *(Critère de Riemann) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = l$ (finie) alors*
   * *Si $l \neq 0$, la série converge si et seulement si $\alpha > 1$.*
   * *Si $l = 0$ et $\alpha > 1$ alors la série converge.*

Démonstration :

1. Critère de d'Alembert (Jean Le Rond d'Alembert, 1717-1783) D'après la définition de la limite on a

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\,,\; \forall n \in \mathbb{N} \quad \left[n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| \leq \varepsilon\right]$$

C'est-à-dire qu'à partir de n_ε on a

$$l - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$\frac{(l-\varepsilon)^{n+1}}{(l-\varepsilon)^n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{(l+\varepsilon)^{n+1}}{(l+\varepsilon)^n}$$

Ceci est exactement l'hypothèse de la comparaison bis [proposition 1.3.5] avec une série géométrique ($q = l - \varepsilon$ ou bien $q = l + \varepsilon$). Donc si $l < 1$, on choisit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $l + \varepsilon < 1$ (n'importe quel $\varepsilon < 1 - l$ convient). La convergence de la série découle de la convergence de la série géométrique avec $q = l + \varepsilon$ et de la comparaison bis. Maintenant si $l > 1$, on choisit $\varepsilon > 0$ de telle sorte que $l - \varepsilon > 1$ (il suffit que $\varepsilon < l - 1$). Dans ce cas la série géométrique avec $q = l - \varepsilon$ diverge, ce qui donne la divergence de la série étudiée. Pour le cas $l = 1$, n'importe quel choix de ε donne une série géométrique minorante convergente et une série géométrique majorante divergente, ce qui ne permet pas de conclure.

2. Critère de Cauchy (Augustin Louis Cauchy, 1789-1857) D'après la définition de la limite on a

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\,,\; \forall n \in \mathbb{N} \quad \left[n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |u_n^{1/n} - l| \leq \varepsilon \right]$$

C'est-à-dire qu'à partir d'un certain n_ε on a

$$(l-\varepsilon)^n \leq u_n \leq (l+\varepsilon)^n$$

Ceci est exactement l'hypothèse de la comparaison [proposition 1.3.3] avec une série géométrique ($q = l - \varepsilon$ ou bien $q = l + \varepsilon$). La discussion précédente suivant les valeurs de l peut être reprise mot pour mot.

3. Critère de Riemann (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866)

   ∗ Si $l > 0$, la limite dans l'hypothèse indique que $u_n \sim \dfrac{l}{n^\alpha}$. Donc la convergence aura lieu si et seulement si $\alpha > 1$ conformément à l'étude du modèle de la série de Riemann.

   ∗ Si $l = 0$, la définition de la limite donne qu'à partir d'un certain rang n_ε on a

   $$-\varepsilon \leq n^\alpha u_n \leq \varepsilon \Longrightarrow u_n \leq \frac{\varepsilon}{n^\alpha}$$

   et donc si de plus $\alpha > 1$ alors la série convergera grâce au critère de comparaison et au modèle de la série de Riemann.

■

Exemple 1.5.2 *1. Soit à étudier la série de terme général* $u_n = \dfrac{n^a}{a^n}$ *avec* $a > 0$ *un paramètre réel. Un calcul (application du critère de d'Alembert) simple donne*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^a\, a^n}{n^a\, a^{n+1}} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{a}$$

La série sera donc convergente si $a > 1$ et divergente si $a < 1$. Le cas $a = 1$ donne $u_n = n$ qui est divergente car la condition nécessaire de convergence n'est pas satisfaite.

2. *Voici un deuxième exemple, $v_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. Il est parfois utile de vérifier à priori la condition nécessaire de convergence. Dans notre cas*
$$\ln v_n = n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -n^2\left[\frac{1}{n} + O(1/n^2)\right]$$
où nous avons utilisé un développement limité à l'ordre 1 de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0. Il est clair alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln v_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Maintenant nous allons faire appel au critère de Cauchy pour étudier la série de terme général v_n. On a
$$v_n^{1/n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} < 1$$
Donc la série est convergente.

3. *Étudions enfin la série de terme général $w_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Il est clair d'abord que pour n assez grand, $w_n > 0$. On peut appliquer le critère de Riemann. En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = 1$, ce qui implique la convergence de la série.*

1.6 Règle de Raabe-Duhamel

La règle de Raabe-Duhamel [1] que nous allons énoncer et démontrer, donne une réponse quand le critère de d'Alembert cesse de fonctionner.

Proposition 1.6.1 *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Supposons qu'à partir d'un certain rang n_0 on ait*
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{l}{n} + \varepsilon_n$$
où $\lim\limits_{n\to+\infty} n\varepsilon_n = 0$. Alors

- *Si $l > 1$, la série converge ;*
- *Si $l < 1$, la série diverge ;*
- *Si $l = 1$, on ne peut pas en général conclure.*

Démonstration : Considérons la série de Riemann $v_n = \dfrac{1}{n^a}$ où a est un paramètre d'ajustement. On a à partir d'un certain rang n_1 $(n \geq n_1)$
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-a} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-a} = 1 - \frac{a}{n} + r_n$$

1. Joseph Ludwig Raabe, 1801-1859 / Jean-Marie Constant Duhamel 1797-1872

avec $r_n = O\left(1/n^2\right)$. C'est une simple application du développement limité de la fonction $x \mapsto (1+x)^{-a}$ à l'ordre 1 au voisinage de 0. Prenons $n \geq \max(n_0, n_1)$. On peut écrire alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a-l}{n} + \varepsilon_n - r_n.$$

D'où

$$\lim_{n \to +\infty} n \left[\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}\right] = a - l$$

- □ <u>Cas $l > 1$:</u> On choisit le paramètre $a \in \left]1, l\right[$ de sorte que d'une part $a > 1$ et $a - l < 0$ d'autre part. D'après la limite précédente, à partir d'un certain rang n_2 on a

$$n \left[\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}\right] < 0 \Longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

  Ceci nous permet d'appliquer la comparaison bis (proposition (1.3.5)) avec comme série majorante une série de Riemann convergente puisque $a > 1$. Notre série est donc convergente.

- □ <u>Cas $l < 1$:</u> On choisit dans ce cas $a \in \left]l, 1\right[$ de sorte que d'une part $a < 1$ et $a - l > 0$ d'autre part. Le même raisonnement que le précédent nous permet d'écrire à partir d'un certain n_3

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

  On applique à nouveau la comparaison bis avec une série minorante cette fois divergente (série de Riemann avec $a < 1$). Notre série sera dons divergente.

- □ <u>Cas $l = 1$:</u>

  - ∗ Si on choisit $a > 1$, on aura une minoration par une série convergente. Cela ne permet pas de conclure.
  - ∗ Si on choisit $a < 1$, on aura une majoration par une série divergente. Cela ne permet pas de conclure non plus.
  - ∗ Avec le choix de $a = 1$, on n'arrive pas à fixer, à partir d'un certain rang, le signe de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

■

Exemple 1.6.2 *On se propose d'étudier la série de terme général*

$$w_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right), \quad n \geq 2.$$

La structure multiplicative de l'expression du terme général suggère d'utiliser le critère de d'Alembert. Il est facile de montrer que

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = 1$*. Essayons d'aller plus loin avec la règle de Raabe-Duhamel. Rappelons le développement limité de la fonction sinus à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O\left(x^4\right)$$

Nous avons alors

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 - \frac{1}{6n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

C'est la forme préconisée dans la règle de Raabe-Duhamel avec $l = \frac{1}{6} < 1$*. La série est donc divergente.*

1.7 Séries à termes quelconques

Nous allons examiner dans cette section les séries dont le terme général est de signe quelconque.

1.7.1 Convergence absolue

Définition 1.7.2 *On dit que la série numérique* $\sum u_n$ *à termes quelconques est absolument convergente si la série* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

Exemple 1.7.3

- *La série géométrique* $\sum q^n$ $(q \in \mathbb{R})$ *converge absolument si et seulement si* $|q| < 1$ *car* $|q^n| = |q|^n$.
- *La série* $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ *converge absolument.*
- *La série* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *ne converge pas absolument. Pour ces deux dernières, se référer aux résultats sur les séries de Riemann.*

Proposition 1.7.4 *Si une série converge absolument alors elle converge.*

Démonstration : Soient $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|$ les suites des sommes partielles de la série $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$ respectivement. L'hypothèse de la proposition est que la suite (S_n) converge. Le but est de montrer que la suite (U_n) converge. Sachant que dans $\mathbb{R}$ les suites convergentes sont de Cauchy et réciproquement, nous allons montrer que (U_n) est de Cauchy. En effet, on a d'abord

$$U_{n+p} - U_p = \sum_{k=p+1}^{n+p} u_k$$

d'où

$$|U_{n+p} - U_p| \leq \sum_{k=p+1}^{n+p} |u_k| = S_{n+p} - S_p$$

Nous partons du fait que (S_n) est convergente, donc de Cauchy, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \quad [n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow 0 \leq S_{n+p} - S_p \leq \varepsilon]$$

Ce qui donne qu'à partir du même n_ε on a $|U_{n+p} - U_p| \leq \varepsilon$; et donc la suite (U_n) est de Cauchy, donc convergente. L'outil qui a fait fonctionner cette démonstration est tout simplement l'inégalité triangulaire de la valeur absolue. ■

Remarque 1.7.5 *(Importante) Il existe des séries convergentes, mais pas absolument convergentes. On les appelle semi-convergentes. Un exemple classique est celui de la série de terme général* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

1.7.6 Critère d'Abel

Le critère d'Abel (Niels Henrik Abel, 1802-1829) que nous allons exposer, concerne un type de séries à termes quelconques. Il donne des conditions suffisantes pour la convergence.

Théorème 1 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes quelconques telle que :*

$*$ $u_n = a_n \, b_n$

$*$ $a_n \geq 0$, (a_n) *est décroissante et* $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

$*$ $\exists M > 0 \, , \; \forall n \in \mathbb{N} \qquad |\sum\limits_{k=0}^{n} b_k| \leq M.$

Alors la série $\sum u_n$ *converge.*

Démonstration : Il faut montrer que la suite des sommes partielles est de Cauchy. Posons

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \; \Longrightarrow \; b_k = B_k - B_{k-1}$$

Maintenant si $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, alors

$$U_{n+p} - U_p = \sum_{k=p+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=p+1}^{n+p} a_k \left(B_k - B_{k-1}\right)$$

$$= \sum_{k=p+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=p}^{n+p-1} a_{k+1} B_k = \sum_{k=p+1}^{n+p-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) B_k + a_{n+p} B_{n+p} - a_{p+1} B_p$$

Remarquons que $(a_k - a_{k+1}) \geq 0$ grâce à l'hypothèse de décroissance de la suite (a_n). On en déduite donc

$$|U_{n+p} - U_p| \leq \sum_{k=p+1}^{n+p-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) |B_k| + a_{n+p}|B_{n+p}| + a_{p+1}|B_p|$$

$$\Longrightarrow |U_{n+p} - U_p| \leq 2M a_{p+1}$$

Enfin, grâce à l'hypothèse $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, on peut dire que

$$\lim_{n,p \to +\infty} |U_{n+p} - U_p| = 0.$$

C'est-à-dire que la suite des sommes partielles est de Cauchy, donc convergente. ■

Exemple 1.7.7 • *Examinons d'abord l'exemple de la série alternée* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. *Ici,* $a_n = \frac{1}{n}$ *est une suite positive décroissante vers* 0 *; et* $b_n = (-1)^n$. *Il est facile de montrer que*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \Longrightarrow |\sum_{k=0}^{n} (-1)^k| \leq 1$$

Le critère d'Abel s'applique donc, et la série est convergente.

• *Voici un autre exemple* $\sum \frac{\cos n\theta}{n}$. *Nous avons le même* $a_n = 1/n$ *que le précédent. Montrons que, pour* θ *convenablement choisi,* $b_n = \cos n\theta$ *vérifie l'hypothèse du critère d'Abel. En effet*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \sum_{k=0}^{n} \Re\left(e^{i\theta}\right) = \Re\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i\theta}\right) = \Re\left(\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}\right)$$

$$\Longrightarrow B_n = \Re\left(e^{in\theta/2} \frac{e^{i(n+1)\theta/2} - e^{-i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}\right) = \frac{\cos(n\theta/2)\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

$$\Longrightarrow |B_n| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$$

à condition de choisir $\theta \neq 2m\pi,\ \forall m \in \mathbb{Z}$.

1.7.8 Opérations sur les séries absolument convergentes

On laisse au lecteur le soin de montrer les propriétés suivantes. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes quelconques absolument convergentes. Alors

- la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ est absolument convergente $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- la série (produit de Cauchy) de terme général $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ est absolument convergente.
- si $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une bijection, alors $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente.