UABT / Faculté des Sciences 06 /07/21
Département de Mathématiques
L2 MATH Topologie

Epreuve de Rattrapage Durée 01h30

Exercice 1 08 pts

Soient $(E, \Im)$ et $\left(F, \Im'\right)$ deux espaces topologiques.

1) Montrer que si F est muni de la topologie grossière $\Im' = \{\varnothing, F\}$ alors toute application de E vers F est continue..

2) Montrer que si E est muni de la topologie discrète $\Im = P(E)$ alors toute application de E vers F est continue..

On pose $E = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et $F = \{0, 1\}$,étudier la continuité de l'application f de E vers F,

définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

dans les cas où F est muni de la topologie grossière puis de la topologie dicrète.

3) Soit f une application continue et injective de $(E, \Im)$ vers $\left(F, \Im'\right)$.

a) Montrer que si F est séparé alors E est séparé. (on rappelle que si f est injective alors $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$)

b) En déduire que tout espace homéomorphe à un espace séparé est séparé.

Exercice2 (12pts)

I. Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $f : (E, d) \to (F, \delta)$ un homéomorphisme uniformément continue .

1. Montrer que si (F, δ)est complet alors (E, d) est complet.
2. Que peut –on dire si f est une isométrie ?

II . On considère l'application d $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ telle que $d(x, y) = |e^{-2x} - e^{-2y}|$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : (\mathbb{R}, d) \to (]0, +\infty[, |.|)$ telleque $f(x) = e^{-2x}$. Montrer que f est une isométrie.
3. Montrer que l'espace $(]0, +\infty[, |.|)$ n'est pas complet.(utiliser la suite $(x_n = 1/n)_{n \in N^*}$

En déduire que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

4. Les distances d et $|.|$ sont-elles topologiquement équivalentes ?

sont-elles métriquement équivalentes ?

Corrigé

Exercice 1 08 pts

$f:(E,\Im)\to(F,\Im')$ est continue ssi l'image réciproque de tout ouvert de $\Im'$est un ouvert de $\Im$

Si $\Im'=\{\varnothing,F\}$ alors $f^{-1}(\varnothing)=\varnothing\in\Im$ e t $f^{-1}(F)=E\in\Im$

pour toute application f de E vers F alors f est continue...

2) Si $\Im$ $=P(E)$ (ensembles des parties de E) alors $\forall U\in\Im'$,$f^{-1}(U)\in P(E)$

d'où toute application de E vers F est continue..

.

$$f\ :\mathbb{R}\to F=\{0,1\},\ telle\ que\ f(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 \text{ si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

$\mathbb{R}$ est muni de la topologie usuelle,

Si F est muni de la topologie grossière alors d'après 1) f est continue..

Si F est muni de la topologie dicrète.$\Im'=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$

On a $f^{-1}(\{1\})=\mathbb{Q}$ qui est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R},|.|)$ (car $int\mathbb{Q}=\varnothing$ et $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$)

alors f n'est pas continue.

3) Soit f une application **continue et injective** de $(E,\Im)$ vers $(F,\Im')$.

a) E est séparé. ssi $\forall x,y\in E,x\neq y$, $\exists$ U_1 et $U_2\in\Im$ tels que $x\in U_1$ et $y\in U_2$et $U_1\cap U_2=\varnothing$

Sachant que f est injective alors $f(x)\neq f(y,)$ et comme F est séparé alors ils existent deux ouverts V_1 et V_2 tels que $f(x)\in V_1$ et $f(y)\in V_2$ et $V_1\cap\ V_2=\varnothing$

comme f est une application **continue** alors $f^{-1}(V_1)\ et\ f^{-1}(V_2))$ sont deux ouverts dans E et ils sont disjoints car

$f^{-1}(V_1)\cap f^{-1}(V_2))=\ f^{-1}(V_1\cap\ V_2)=f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$

ainsi il suffit de prendre $U_1=\ \ f^{-1}(V_1)\ \ etU_2=$$f^{-1}(V_2))$

b)

Si $(E,\Im)$ est homéomorphe à un espace $(F,\Im')$ alors il existe un homéomorphisme(application bijective et bicontinue) **f** de $(E,\Im)$ vers $(F,\Im')$

Ainsi si $(F,\Im')$ est séparé.,d'après a) $(E,\Im)$ sera séparé.

Exercice2 (12pts)

I. Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et $f:(E,d)\to(F,\delta)$ un homéomorphisme uniformément continue .

1. (E,d) est complet.ssi toute suite de Cauchy $(x_n)_n \subset E$,converge dans E.

Comme f est uniformément continue alors $\forall \varepsilon \succ 0, \exists \alpha_\varepsilon \succ 0, \forall x, y \in E$ $d(x,y) \leq \alpha_\varepsilon \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$

Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans E, ie $\forall \alpha \succ 0, \exists N_\alpha \in \mathbb{N}/\forall n, m \in \mathbb{N}; n \succ m \geq N_\alpha \Longrightarrow d(x_n, x_m) \leq \alpha$

en particulier pour $\alpha = \alpha_\varepsilon \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n, m \in \mathbb{N}; n \succ m \geq N_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, x_m) \leq \alpha_\varepsilon$

Ainsi . $\forall \varepsilon \succ 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n, m \in \mathbb{N}; n \succ m \geq N_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, x_m) \leq \alpha_\varepsilon \Longrightarrow \delta(f(x_n), f(x_m)) \leq \varepsilon$

alors la suite $(f(x_n))_n$est aussi une suite de Cauchy dans F et puisque (F,δ) est complet alors elle converge dans F vers une limite $l = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$

en utilisant la continuité de f^{-1} ,on obtient $\lim_{n\to+\infty} x_n = f^{-1}(l) \in E$.

2.Si f est une isométrie alors f est bijective et vérifie $\delta(f(x), f(y)) = d(x,y)$ alors f et f^{-1} sont uniformément continues alors si l'un des espace est complet l'autre sera aussi complet et le contraire est aussi vrai.Ainsi les deux espaces sont simultanément complets ou ils simultanément non complets

II . d $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ telle que $d(x,y) = |e^{-2x} - e^{-2y}|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |e^{-2x} - e^{-2y}| = 0$

$\Leftrightarrow e^{-2x} = e^{-2y}$

$\Leftrightarrow -2x = -2y \Leftrightarrow x = y$

ii) $d(x,y) = |e^{-2x} - e^{-2y}| = \left|e^{-2y} - e^{-2x}\right| = d(y,x)$

iii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $d(x,z) = |e^{-2x} - e^{-2z}| = |e^{-2x} - e^{-2y} + e^{-2y} - e^{-2z}| \leq |e^{-2x} - e^{-2y}| + |e^{-2y} - e^{-2z}| = d(x,y) + d(y,z)$

Alors d est une distance sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f : (\mathbb{R}, d) \to (]0, +\infty[, |.|)$ telleque . $\forall y \succ 0, y = f(x) = e^{-2x} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\ln y$

$\forall y \succ 0$ $\exists!$ x$\in \mathbb{R} : y = f(x)$ alors f est bijective et $\forall y \succ 0$ $f^{-1}(y) = -\frac{1}{2}\ln y$

$|f(x) - f(y)|$ =$|e^{-2x} - e^{-2z}| = d(x,y)$, *ansi* f est une isométrie.

3. L'espace $(]0, +\infty[, |.|)$ n'est pas complet.(utiliser la suite $(x_n = 1/n)_{n\in N^*}$. $\forall \varepsilon \succ 0, |x_n - x_m| = |1/n - 1/m| = \frac{n-m}{nm} \leq \frac{n}{nm} \leq \frac{1}{m} \leq \varepsilon$ pour $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$

$\exists N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1\right] \in \mathbb{N}/\forall n, m \in \mathbb{N}; n \succ m \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |x_n - x_m| \leq \varepsilon$

la suite $(x_n = 1/n)_{n\in N^*}$est de Cauchy dans $]0, +\infty[$ mais $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \notin]0, +\infty[$,alors espace $(]0, +\infty[, |.|)$ n'est pas complet

On déduit d'après I.2) que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

4.

– La continuité de la fonction f de$(\mathbb{R}, |.|)$ vers $(]0, +\infty[, |.|)$ telle que $f(x)$ =e^{-2x} donne:

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \succ 0, \exists \alpha_\varepsilon \succ 0,$ $|x - y| \leq \alpha_\varepsilon \Longrightarrow d(x,y) = |e^{-2x} - e^{-2z}| \leq \varepsilon$

ce qui exprime exactement la continuité de l'application identité de $(\mathbb{R}, |.|)$

vers $(\mathbb{R}, d)$

–La continuité de la fonction f^{-1} de$(]0,+\infty[, |.|)$ vers $(\mathbb{R}, |.|)$ $f^{-1}(x) = -\frac{\ln x}{2}$donne:

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \succ 0, \exists \alpha_{\varepsilon} \succ 0,\ |e^{-2x} - e^{-2z}|\ \leq \alpha_{\varepsilon} \Longrightarrow |x - y| \leq \varepsilon$

ce qui exprime exactement la continuité de l'application identité de$(\mathbb{R}, d)$ vers $(\mathbb{R}, |.|)$

On conclue que l'application identité est un homéomophisme,,donc les distances d et $|.|$ sont topologiquement équivalentes

– Les distances d et $|.|$ ne sont- pas métriquement équivalentes car $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet

par contre $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet. (la propriété d'espace complet est conservée par les distances métriquement équivalentes)