Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **2020-2021**
Département de Mathématiques **Rattrapage**
Module: Analyse numérique 1 **Durée: 1h30**

Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice1 :
1) Déterminer un polynôme d'interpolation passant par les points

$$(0,0),(1,3),(3,1)$$

2) Déterminer un polynôme d'interpolation passant par les points

$$(0,0),(1,3),(3,1),(5,2),(8,2)$$

Donner l'expression analytique du terme d'erreur.

Exercice2 : Soit la fonction suivante :

$$f(x)=\sin(x)$$

1) Calculer le développement de Taylor de degré 3 de la fonction f autour de 0.
2) Donner l'expression analytique du terme d'erreur.
3) Donner une approximation de $\sin(0.1)$ et calculer l'erreur absolue.

Exercice3 : On cherche à résoudre l'équation :

$$x^2-2=0$$

(dont la solution est $\sqrt{2}$) en utilisant la méthode des points fixes :

$$x_{n+1}=g(x_n)=x_n-a(x_n^2-2)$$

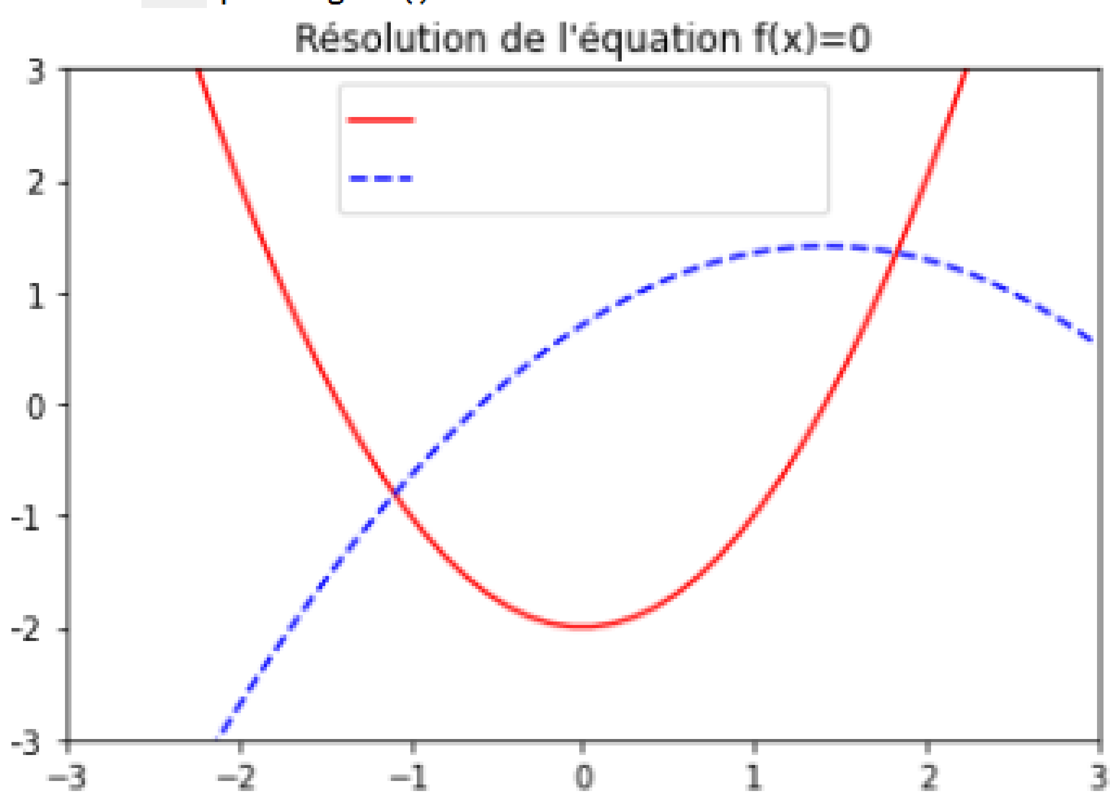
où a est une constante.
1) Pour quelles valeurs de a cette méthode des points fixes est-elle convergente à l'ordre 1 ?

2) Quel est l'ordre de convergence pour $a=\frac{\sqrt{2}}{4}$?

3) Quel est l'ordre de convergence si $a=3\sqrt{2}$?

4) Compléter le programme suivant :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def - - - - - - - - - - - - -
    k = 1
    x1 = g(x0)
    while abs(x1-x0) > epsilon:
     - - - - - - - - - - - - -
     - - - - - - - - - - - - -
     - - - - - - - - - - - - -
    return x1
a=np.sqrt(2)/4
f= - - - - - - - - - - - - -
g= - - - - - - - - - - - - -
sol=point_fixe(g,1,0.001)
print(sol)
x= np.linspace(-3,3,50)
plt.plot( - - - - - - - - - - - - -
plt.plot( - - - - - - - - - - - - -
plt.plot(sol,f(sol),"g*")
plt.axis([-3,3,-3,3])
plt.title("Résolution de l'équation f(x)=0")
plt.legend()
```



Exercice1 :

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & \boxed{0} & & & & \\
1 & 3 & \boxed{3} & & & \\
3 & 1 & -1 & \boxed{-4/3} & & \\
5 & 2 & 1/2 & 3/8 & \boxed{41/120} & \\
8 & 2 & 0 & -1/10 & -19/280 & \boxed{-43/840}
\end{array}$$

1p

1) Polynôme de Newton passant par les points $(0,0),(1,3),(3,1)$ est

$$P_2(x) = 3x - \frac{4}{3}x(x-1)$$ 1p

2) Polynôme de Newton passant par les points $(0,0),(1,3),(3,1),(5,2),(8,2)$ est

$$P_4(x) = 3x - \frac{4}{3}x(x-1) + \frac{41}{120}x(x-1)(x-3) - \frac{43}{840}x(x-1)(x-3)(x-5)$$ 1p

L'expression analytique du terme d'erreur : Soit P_4 le polynôme qui interpole la fonction f aux points $(0,0),(1,3),(3,1),(5,2),(8,2)$ alors $\forall x \in [0,8], \exists \xi \in [0,8]$:

$$E_4\big(f(x)\big) = f(x) - P_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x(x-1)(x-3)(x-5)(x-8)$$ 1p

Exercice2 :Soit la fonction suivante :$f(x) = \sin(x)$

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sin(x) & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos(x) & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin(x) & f''(0) = 0 \\
f^{(3)}(x) = -\cos(x) & f^{(3)}(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \sin(x) &
\end{array}$$

Le développement de Taylor de degré 3 de la fonction $\sin(x)$ autour de 0 est

$$\sin(h) = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{\sin(\xi(h))h^4}{4!} \qquad \text{où } \xi(h) \in [0,h]$$ 1p

2) Donner l'expression analytique du terme d'erreur. Puisque $\sin x$ est majorée par 1

$$|R_3(h)| = \left|\frac{\sin(\xi(h))h^4}{4!}\right| \le \frac{|h|^4}{4!} \qquad \text{où } \xi(h) \in [0,h]$$ 1p

3) Donner une approximation de $\sin(0.1)$ et calculer l'erreur absolue.

$$\sin(0.1) \approx 0.1 - \frac{(0.1)^3}{3!} \approx 0.1 - 0.1666666 \times 10^{-3} \approx 0.1 - 0.00016666... \approx 0,099833333...$$ 1p

et l'erreur absolue $|R_3(h)| \le \dfrac{(0.1)^4}{4!} \approx 0.416666... \times 10^{-5}$ 1p

Exercice3 : On cherche à résoudre $x^2 - 2 = 0$ en utilisant la méthode des points fixes :

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - a(x_n^2 - 2)$$

où a est une constante.
1) On a

$$\begin{aligned} g(x) &= x - a(x^2 - 2) \\ g'(x) &= 1 - 2ax \end{aligned}$$

Alors pour appliquer la méthode des points fixes il faut bien choisir l'intervalle $I = [\alpha, \beta]$ ($\sqrt{2} \in I$) tel que **condition(1)** $g : I \to I$ de C^1 *1p* **condition(2)** $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$

condition(2) : $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$.

$$\begin{array}{ccccc} -1 & < & 1 - 2ax & < & 1 \\ -2 & < & -2ax & < & 0 \\ 0 & < & ax & < & 1 \end{array}$$ *1p*

Pour $x = \sqrt{2}$ on obtient $0 < a < \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *1p*

Donc $\forall x \in I \subset \left]0, \dfrac{1}{a}\right[: |g'(x)| < 1$

condition(1) : il existe α, β tel que $g([\alpha, \beta]) \subset [\alpha, \beta] \subset \left]0, \frac{1}{a}\right[$

x	$0 < \alpha$		$\frac{1}{2a}$		$\beta < \frac{1}{a}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(\alpha) \geq \alpha$	$\nearrow$	$g(\frac{1}{2a}) \leq \beta$	$\searrow$	$g(\beta) \geq \alpha$

1p

Pour $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ cette méthode des points fixes est convergente d'ordre au moin1.
Si $a \neq \frac{\sqrt{2}}{4}$ alors $g'(\sqrt{2}) = 1 - 2a\sqrt{2} \neq 0$ et donc la convergence est d'ordre 1. *1p*
2) pour $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$ on a

$$\begin{aligned} g'(\sqrt{2}) &= 1 - 2\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{2} = 0 \\ g''(x) &= -2a = -2\frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0. \end{aligned}$$ *1p*

Donc la convergence est quadratique.
3) Pour $a = 3\sqrt{2}$ on a $\left|g'\left(\sqrt{2}\right)\right| \geq 1$ et donc il ya divergence. *1p*

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def point_fixe(g,x0,epsilon):   0.5p
    k = 1
    x1 = g(x0)
    while abs(x1-x0) > epsilon:
        k = k+1    0.5p
        x0 = x1    0.5p
        x1 = g(x0) 0.5p
    return x1
a=np.sqrt(2)/4
f=lambda x:x**2-2  0.5p
g=lambda x:x-a*(x**2-2)  0.5p
sol=point_fixe(g,1,0.001)
print(sol)
x= np.linspace(-3,3,50)
plt.plot(x,f(x),"r-",label="$f(x)=x^2-2$")  0.5p
plt.plot(x,g(x),"b-",label="$g(x)=x-a*(x**2-2)$") 0.5p
plt.plot(sol,f(sol),"g*")
plt.axis([-3,3,-3,3])
plt.title("Résolution de l'équation f(x)=0")
plt.legend()
```