Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2020/2021.

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 3.
Module : *Analyse 3* - Examen de Remplacement.
Jeudi 22/04/2021 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (08pts) On considère la suite réelle définie par $u_n = \dfrac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ où $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ est la partie entière de $\dfrac{n}{2}$.

1. Montrer que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente, et qu'elle n'est pas absolument convergente. On notera S sa somme.
2. On considère à présent la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} u_n x^n$. Déterminer son rayon de convergence, puis son domaine de convergence. On notera $S(x)$ sa somme.
3. Calculer $S(x)$ en précisant le domaine de validité des calculs.
4. En déduire la valeur de S en justifiant tous les passages.

Exercice 2 : (08pts) On définit la fonction f paire et 2π-périodique par sa restriction à $[0, \pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - x & \text{si } \ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \ \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f dans l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier de f sous sa forme réelle, notée $S_f(x)$. Où converge-t-elle vers $f(x)$?
3. En déduire la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{4})}{n^2}$.

Exercice 3 : (04pts) Étudier, suivant les valeurs du paramètre réel α, la convergence de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)^\alpha}\, dx$$

2ème année de Licence de Mathématiques – 2020/2021.

Module : "Analyse III" – Semestre 3 – Examen de Remplacement.

Corrigé

Exercice 1 : (08 pts)

1°/ Soit $u_n = \frac{(-1)^{[n/2]}}{n+1}$, $n \geq 0$. Remarquons d'abord que

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} k & \text{si } n = 2k \text{ (pair)} \\ k & \text{si } n = 2k+1 \text{ (impair)} \to \text{car } \frac{n}{2} = k + \frac{1}{2} \text{ et } k \leq k+\frac{1}{2} < k+1. \end{cases}$$

Donc $u_{2k} = \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $u_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{2k+2}$. Pour montrer la convergence de la série numérique $\sum u_n$, on revient à la définition en considérant la suite des sommes partielles :

$$U_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{k=0}^{[N/2]} u_{2k} + \sum_{k=0}^{[N/2]} u_{2k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{[N/2]} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \sum_{k=0}^{[N/2]} \frac{(-1)^k}{2k+2}$$

02 pts

Chacune des deux sommes est alternée, on peut donc utiliser le critère d'Abel. Les deux suites $\frac{1}{2k+1}$ et $\frac{1}{2k+2}$ sont positives, décroissantes et tendent vers 0 ; et $\left|\sum_{k=0}^{m} (-1)^k\right| \leq 1$.

Donc les deux sommes sont convergentes.

Pour la convergence absolue on a : $|u_n| = \frac{1}{n+1}$ qui est le terme général d'une série divergente (Riemann, $\alpha = 1$).

2°/ On étudie maintenant $\sum_{n\geq 0} u_n x^n$. On calcule le rayon de convergence par la formule de d'Alembert par exemple :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = \boxed{1}$$

1 pts

Le domaine de convergence contient déjà l'intervalle ouvert $]-1,1[$. Examinons les points $x=1$ et $x=-1$.

Pour $x=1$, on a $\sum_{n\geq 0} u_n$ qui est convergente d'après la première question.

Pour $x=-1$, on a $(-1)^n u_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2k+1} & \text{si } n=2k \\ \frac{(-1)^{k+1}}{2k+2} & \text{si } n=2k+1 \end{cases}$

et on refait le raisonnement de la $1^{\text{ère}}$ question, qui donne que $\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ est convergente aussi. Ainsi le domaine de convergence simple est $\boxed{D=[-1,1]}$ 1pt

3% Notons $S(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{[n/2]}}{n+1} x^n$

Pour $x \in]-1,1[$, on peut écrire :

$$[xS(x)]' = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{[n/2]}}{n+1} x^{n+1}\right)' = \sum_{n\geq 0} (-1)^{[n/2]} x^n$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k+1}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}.$$ 2pts

$$\Rightarrow xS(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

En évaluant en $x=0$, on aura $C=0$. D'où

$$\boxed{S(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \frac{1}{2x}\ln(1+x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

Le domaine de validité de ces calculs est $]-1,1[$ sur lequel on peut dériver et intégrer.

4°/ D'après le théorème d'Abel-Tauber on a :

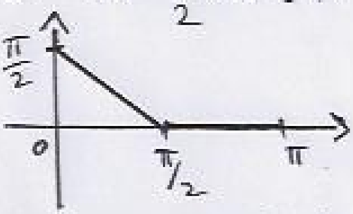
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} S(x) = \sum_{n \geq 0} u_n = S$$

D'où $\boxed{S = \arctg 1 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}}$ 02pts

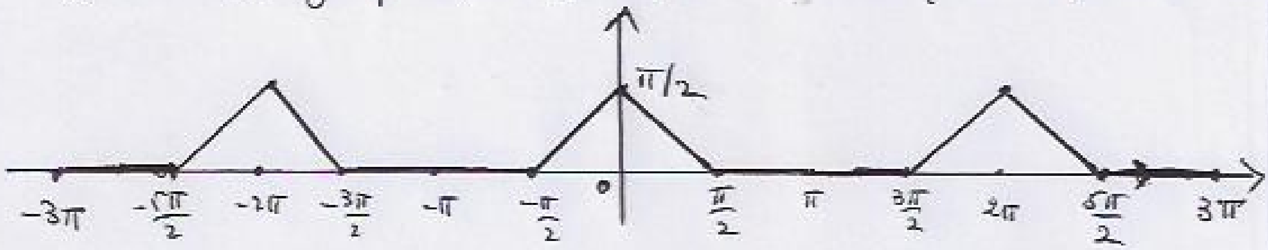
---

<u>Exercice 2</u> : (08pts) Sur $[0,\pi]$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$

1°/ Traçons le graphe d'abord sur $[0,\pi]$:



On utilise après la parité pour tracer le graphe sur $[-\pi,\pi]$ et l'étendre par 2π-périodicité. 2pts



2°/ Comme f est paire alors $\forall n \geq 1$, $b_n = 0$. Calculons les a_n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 \right]_0^{\pi/2}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{\pi}{4}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \cancel{\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi/2}}^{\,0} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi/2}$$ 3pts

$$\boxed{a_n = \frac{2\left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right)}{n^2 \pi} = \frac{4 \sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n^2 \pi}} \quad \left(1 - \cos\theta = 2\sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

Puisque f est continue alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_f(x) = f(x)$.

3°/ On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{8} + \frac{4}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{4})}{n^2} \cos nx$

Pour $x=0$ on aura : $\left(f(0) = \pi/2 \right)$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{4}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{4})}{n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{4})}{n^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{3\pi^2}{32}}$$

3pts

Exercice 3 : (04pts), $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad I = \int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)^\alpha} dx$.

Posons $f(x) = \frac{\ln x}{(1-x)^\alpha}$. En tout point de $]0,1[$, f est continue. $\lim_{x \to 0^>} f(x) = -\infty$, donc l'intégrale est impropre en 0. Aussi $\lim_{x \to 1^<} f(x) = \begin{cases} \text{"}\frac{0}{0}\text{"} & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha \leq 0. \end{cases}$ 1pt

Donc pour $\alpha > 0$, l'intégrale est impropre en 1 aussi.

* Etude en 0 : On a $\lim_{x \to 0^>} \frac{\sqrt{x}\,|\ln x|}{(1-x)^\alpha} = 0$, d'où dans $]0,\delta]$ (δ petit) on a : $\frac{\sqrt{x}\,|\ln x|}{(1-x)^\alpha} \leq 1$ (par exemple) 1,5pt

$$\Rightarrow 0 \leq |f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\int_0^\delta \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge (Riemann avec $a = \frac{1}{2} < 1$, en 0) alors $\int_0^\delta |f(x)|\,dx$ converge aussi et ce $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

* Etude en 1 : On a $\lim_{x \to 1^<} \frac{\ln x}{1-x} = (\ln x)'|_{x=1} = 1$. D'où au voisinage de 1, $f(x) \sim \frac{1}{(1-x)^{\alpha-1}}$. La convergence aura lieu si et ssi $\alpha - 1 < 1 \Rightarrow \boxed{\alpha < 2}$ 1,5pt

En définitive, I converge si et ssi $\boxed{\alpha < 2}$. $\boxed{4}$