Université de Tlemcen 03/03/21
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
L2 MATH Topologie Epreuve Finale Durée 01h45

Exercice 1 06,5 pts

Soient $(E, \Im)$ un espace topologique et A une partie de E

1) Donner les définitions des parties suivantes:

$int\,(A)$: intérieur de A , $\overline{A}$: adhérence de A et $Fr\,(A)$: frontière de A

On considère l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la topologie induite par la distance usuelle

2) Déterminer l'intérieur,l'adhérence et la frontière des parties suivantes

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $A_n = \{1, 2, ..., n\}$, $, B =]0, 1] \cup \{2\}$ *et* $C = \{x_n = 2n + 1,\ n \in \mathbb{N}\}$. Ces partie sont -elles compactes ? justifier.

3) Soient (E, d) un espace métrique complet et f une application bijective et continue de (E, d) vers $(\mathbb{R}, |.|)$

a) Montrer que l'ensemble $F = \{x \in \mathbb{R} /\ \ f\,(x) = k,\ \ k \in A_n\}$ est fermé..

b) Montrer que $\forall x_0 \in F$, $\exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \subset F^c$ .telle que $lim_{n\to+\infty} f\,(x_n) = f\,(x_0)$ *et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0. (remarquer que la suite réelle $y_n = k - \frac{1}{n}. \to k$ qd $n \to +\infty$)

c) Etablir que F^c est dense dans E , en déduire que $int\,(F) = \varnothing$

Exercice 2: 05,5 pts

I –On considère l'ensemble $\mathbb{R}^*$ muni de la distance usuelle

Montrer que la suite de terme général $x_n = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^*$, en déduire que $(\mathbb{R}^*, |.|)$ .n'est pas complet.

II – Soit l'application $d : \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que$\forall\ x, y \in \mathbb{Z}^*,\ d\,(x, y) = \frac{|x-y|}{2|xy|}$

1) Démontrer que d est une distance sur $\mathbb{Z}^*$.

2) Montrer que l'application $f : (\mathbb{Z}^*, d) \to (\ \mathbb{R}^*, |.|)$ telle que $f\,(x) = \frac{1}{2x}$ est une isométrie.en déduire que $(\mathbb{Z}^*, d)$ n'est pas complet

3) Montrer que l'application identité est un homéomorphisme de $(\mathbb{Z}^*, d)$ vers $(\ \mathbb{Z}^*, |.|)$ (remarquer que $id_{\mathbb{Z}^*} = f^{-1} o f$) .Les deux distances sont-elles topologiquement équivalentes ? sont-elles métriquement équivalentes ?

Exercice 3: 05 pts

Soit E $= C\,([0, 1]\,, \mathbb{R})$, on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$définie par:

$$f_n\,(x) = \begin{cases} 3n\ x & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{3n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{3n} \prec x \le 1 \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall x \in [0, 1]$, la suite $(f_n\,(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$converge vers une limite $f\,(x)$ que l'on déterminera..

2) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$est une suite de Cauchy dans(E, d_1) et elle est convergente vers f dans (E, d_1) . En déduire que (E, d_1) n'est pas complet.

3) Calculer $lim_{n\to+\infty}\ d_\infty\,(f_n,\ f)$ .Les deux distances sont-elles topologiquement équivalentes ?

On donne $d_1\,(\ f, g) = \int\limits_0^1 |f\,(x) - g\,(x)|\,dx$ *et* $d_\infty\,(\ f, g) = \max_{x\in[0,1]} |f\,(x) - g\,(x)|$

Le Corrigé

Exercice 1 06,5pts

1) 03.75 pts Définitions: $(E,\Im)$ un espace topologique, A $\subset$ E intA= $\underset{o\subset A}{\cup} O$ $(O\in\Im)$

$\overline{A}=\underset{A\subset F}{\cap} F$ Fr$(A)=\overline{A}\cap\overline{C_A^E}$ où O (ouvert) F est fermé.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de la topologie induite par la distance usuelle

ensemble	*intérieur*	*fermeture*	*frontière*	*compacité*
A_n	$\varnothing$	A_n	A_n	A_n est compacte car c'est une:partie finie de $\mathbb{R}$
B	$]-0,1[$	$[-0,1]\cup\{2\}$	$\{-0,1,2\}$	B n'est pas fermé alors il n'est pas compact
C	$\varnothing$	C	C	C n'est pas borné alors il n'est pas compact

2) 0.25 pt Comme f est continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ alors l'image réciproque d'un fermé est fermée

a) 0.75 pt $F=\{x\in E/\ f(x)=k,\ k\in A_n\}=f^{-1}(A_n)$ est fermé. puisque A_n est fermé. .

b) 01 pt $\forall x_0\in F$,$f(x_0)=k$ soit la suite de terme général $y_n=k-\frac{1}{n}$. , comme f est surjective alors $\exists\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\subset F^c$ telle que $y_n=f(x_n)=k-\frac{1}{n}$
et puisque f est continue $lim_{n\to+\infty}f(x_n)=f(\ lim_{n\to+\infty}x_n)=f(x_0)$ alors $lim_{n\to+\infty}x_n=x_0$ car f est injective

c) d'après a) F est fermé alors $\overline{F}=F$et d'après b) $F\subset\overline{F^c}$alors
$E=F\cup F^c=\overline{F}\cup\overline{F^c}=\overline{F^c}$
Ainsi F^cest dense dans E.et comme $E=int(F)\cup\overline{F^c}$alors $int(F)=\varnothing$

Exercice 2: 05,5 pts

I – $\mathbb{R}^*$ est muni de la distance usuelle

La suite de terme général $x_n=\frac{1}{n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^*$, en effet $\forall n,m\in\mathbb{N},n\succ m,\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|=\frac{n-m}{nm}\leq\frac{n}{nm}=\frac{1}{m}\leq\varepsilon\Longrightarrow m\geq\frac{1}{\varepsilon}$
Alors $\forall\varepsilon\succ 0,\exists N_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}+1\right]\in\mathbb{N}$ $\forall n,m\in\mathbb{N},n\succ m\geq,N_\varepsilon\ |x_n-x_m|\leq\varepsilon$
comme $lim_{n\to+\infty}x_n=0\notin\mathbb{R}^*$alors on déduit que $(\mathbb{R}^*,|.|)$ .n'est pas complet.

II – Soit l'application $d:\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que$\forall\ x,y\in\mathbb{Z}^*,\ d(x,y)=\frac{|x-y|}{2|xy|}$

1) d est une distance sur $\mathbb{Z}^*$,en effet,

* $\forall\ x,y\in\mathbb{Z}^*,\ d(x,y)=0\Longrightarrow\frac{|x-y|}{2|xy|}=0\Longrightarrow|x-y|=0\Longrightarrow x=y.$
* $\forall\ x,y\in\mathbb{Z}^*,\ d(x,y)=d(y,x)$
* $\forall\ x,y,z\in\mathbb{Z}^*,\ d(x,z)=\frac{|x-z|}{2|xz|}=\frac{|z-x|}{2|xz|}=\left|\frac{1}{2x}-\frac{1}{2z}\right|=\left|\frac{1}{2x}-\frac{1}{2y}+\frac{1}{2y}-\frac{1}{2z}\right|\leq\left|\frac{1}{2x}-\frac{1}{2y}\right|+\left|\frac{1}{2y}-\frac{1}{2z}\right|\leq d(x,y)+d(y,z)$

2) L'application $f:(\mathbb{Z}^*,d)\to(\ \mathbb{R}^*,|.|)$ telle que $f(x)=\frac{1}{2x}$ est bijective car $\forall\ y\in\mathbb{R}^*\exists\,!x=\frac{1}{2y}\in\mathbb{Z}^*$ tels que $y=\frac{1}{2x}$.
f vérifie aussi $|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{2x}-\frac{1}{2y}\right|=\frac{|x-y|}{2|xy|}=d(x,y)$ alors f est une isométrie,.on déduit que $(\mathbb{Z}^*,d)$ n'est pas complet car $(\ \mathbb{R}^*,|.|)$ n'est pas complet.

3) On remarque que $(\mathbb{Z}^*,d)\ \overset{f}{\to}\ (\ \mathbb{R}^*,|.|)\ \overset{f^{-1}}{\to}\ (\ \mathbb{Z}^*,|.|)$ $id_{\mathbb{Z}^*}=f^{-1}of$. alors l'application identité est un homéomorphisme car c'est l la compos$l$ée de deux homéomorphismes
Ainsi ,les deux distances sont topologiquement équivalentes.

$(\mathbb{Z}^*,|.|)$ est complet car c'est un sous espace fermé de l'espace complet $(\mathbb{R},|.|)$ mais $(\mathbb{Z}^*,d)$ n'est pas complet alors les deux distances ne sont pas métriquement équivalentes.

Exercice 3: 07pts

$E=C([0,1],\mathbb{R})$, on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$définie par:

$$f_n(x)=\begin{cases} 3n\ x & \text{si } 0\leq x\leq \frac{1}{3n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{3n}\prec x\leq 1 \end{cases}$$

1) $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad f_n(0)=0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(0)=0.$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3n}=0,\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\forall x\succ 0,\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\quad \forall n\in\mathbb{N},n\geq,N_\varepsilon\quad \frac{1}{3n}\prec x$ d'où $f_n(x)=1$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=1$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\ f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x=0 \\ 1 & \text{si} \quad 0\prec x\leq 1 \end{cases},.$$

On remarque que f n'est pas continue au point $x=0$,car$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\ 1\neq f(0)$ .alors $f\notin E$.

2) $\forall n,m\in\mathbb{N},n\succ m,\ d_1(\ f_n,f_m)=\int_0^1|f_n(x)-f_m(x)|\,dx=\int_0^{\frac{1}{3n}}(3n-3m)\,xdx+\int_{\frac{1}{3n}}^{\frac{1}{3m}}1-3mxdx=\frac{1}{6m}-\frac{1}{6n}\leq\frac{1}{2m}\leq\varepsilon\Longrightarrow m\geq\frac{1}{2\varepsilon}$

d'où $\forall\varepsilon\succ 0,\exists N_\varepsilon=\left[\frac{1}{2\varepsilon}+1\right]\in\mathbb{N}\quad\forall n,m\in\mathbb{N},n\succ m\geq,N_\varepsilon\quad d_1(\ f_n,f_m)\leq\varepsilon$ alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$est une suite de Cauchy dans(E,d_1).

$$d_1(\ f,,f_n)=\int_0^1|f(x)-f_n(x)|\,dx=\int_0^{\frac{1}{3n}}1-3mxdx=\frac{1}{3n}-\frac{m}{6n^2}\leq\frac{1}{3m}\leq\varepsilon\Longrightarrow m\geq\frac{1}{3\varepsilon}$$

d'où $\forall\varepsilon\succ 0,\exists N_\varepsilon=\left[\frac{1}{3\varepsilon}+1\right]\in\mathbb{N}\quad\forall n\in\mathbb{N},n\geq,N_\varepsilon\quad d_1(\ f_n,f)\leq\varepsilon$ alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$est convergente vers f dans (E,d_1).

On déduit que (E,d_1) n'est pas complet.

3) $lim_{n\to+\infty}\,d_\infty(f_n,\ f)=lim_{n\to+\infty}.\max_{x\in[0,1]}|f(x)-f_n(x)|=lim_{n\to+\infty}.\max_{x\in\left[0,\frac{1}{3n}\right]}|1-3nx|=1\neq 0$; alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$n'est convergente vers f dans (E,d_∞)

$d_1(\ f,,f_n)\to 0$ et $d_\infty(f_n,\ f)\nrightarrow 0$ alors les deux distances ne sont-pas topologiquement

équivalentes