Université de Tlemcen :: Faculté des sciences :: Département de mathématiques

2$^{\text{ème}}$ année LMD MI - Mathématiques - (Semestre 3)

Epreuve de logique mathématique

02 Mars 2021 *Durée : 1 h 30 mn*

Questions de cours (9 pts)

1. C'est quoi un axiome ? Quel est le rôle des axiomes de Peano ? (1 pt + 0.5 pt)
2. On parle de propriété d'idempotence du connecteur logique $\vee$; expliquer. (0.5 pt)
3. Quelle relation existe-t-il entre la disjonction exclusive et l'opérateur ensembliste différence symétrique ? (1 pt)
4. Quelles sont les trois règles de formation d'une formule propositionnelle bien formée ? (1.5 pt)
5. Citer la définition de l'ordre d'une formule propositionnelle. (1 pt)
6. Quelle est la définition d'une formule propositionnelle neutre ? satisfiable ? (1 pt + 1 pt)
7. Enoncer le théorème de la déduction de Herbrand. (1.5 pt)

Exercice 1 (3.5 pts)

Construire, à l'aide d'une table de valeur commune, toutes les fonctions booléennes à deux variables booléennes. (3 pts) Quelle est celle qui correspond à la disjonction exclusive ? (0.5 pt)

Exercice 2 (4 pts)

Soit la formule propositionnelle

$$F := [a \wedge (a \Rightarrow b)] \Rightarrow b,$$

où a et b sont deux atomes.

1. Quel est l'ordre de la formule F ? (0.5 pt)
2. Citer deux constructions différentes de la formule F. (1 pt + 0.5 pt)
3. Montrer que la formule F est valide. (1.5 pt)
4. La validité de la formule F est à la base d'une règle d'inférence en logique mathématique ; laquelle ? (0.5 pt)

Exercice 3 (2 pts)

Soit la formule propositionnelle

$$F := [A \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B,$$

où A et B sont deux formules propositionnelles données.

Etablir que

$$\models F$$

N.B./ 1.5 pt pour la rédaction et la présentation de la copie.

Corrigé

Questions de cours

1. On appelle axiome, tout énoncé (toute proposition logique) que l'on suppose vrai (e) a priori. Les axiomes de Peano permettent de construire l'ensemble des entiers naturels (de manière axiomatique.)
2. On dit que le connecteur logique $\vee$ est idempotent, pour signifier que $p \vee p \equiv p$, où p est proposition logique quelconque.
3. Etant donnés deux parties A et B, d'un ensemble référentiel E, on a

$$A \,\Delta\, B = \{x \in E : (x \in A) \veebar (x \in B)\}.$$

où Δ est l'opérateur ensembliste différence symétrique et $\veebar$ est le connecteur disjonction exclusive.

4. Les trois règles de formation d'une formule propositionnelle bien formée sont
   - Si F est une formule atomique, alors F est une f.b.f.
   - Si F est une f.b.f., alors $\neg F$ est une f.b.f.
   - Si F et G sont des f.b.f., alors $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \Rightarrow G$ et $F \Leftrightarrow G$ sont des f.b.f.
5. L'ordre d'une formule propositionnelle est le nombre d'occurrences de connecteurs logiques dans la formule.
6. Une formule propositionnelle est dite neutre si et seulement s'il existe deux systèmes d'assignations qui confèrent à la formule, les deux valeurs logiques 0 et 1, respectivement.

   Une formule propositionnelle est dite satisfiable si et seulement si elle est valide ou neutre, c'est-à-dire qu'il existe au moins un système d'assignations qui confère à la formule, la valeur logique 1.
7. Théorème de la déduction de Herbrand :

   Si $A \vdash B$, alors $\vdash A \Rightarrow B$.

   Si $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash B$, alors $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1} \vdash A_m \Rightarrow B$

Exercice 1

Les fonctions booléennes de deux variables booléennes sont définies sur la produit cartésien $\{0,1\}\times\{0,1\}$, qui est de cardinal 4. Donc, selon le principe fondamental d'arithmétique, le nombre de ces fonctions est $2^4 = 16$.

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
$f_1(a, b)$	0	0	0	0
$F_2(a, b)$	0	0	0	1
$f_3(a, b)$	0	0	1	0
$f_4(a, b)$	0	0	1	1
$f_5(a, b)$	0	1	0	0
$f_6(a, b)$	0	1	0	1
$f_7(a, b)$	0	1	1	0
$f_8(a, b)$	0	1	1	1
$f_9(a, b)$	1	0	0	0
$f_{10}(a, b)$	1	0	0	1
$f_{11}(a, b)$	1	0	1	0
$f_{12}(a, b)$	1	0	1	1
$f_{13}(a, b)$	1	1	0	0
$f_{14}(a, b)$	1	1	0	1
$f_{15}(a, b)$	1	1	1	0
$f_{16}(a, b)$	1	1	1	1

La fonction booléenne correspondant à la disjonction exclusive est $f_7(.,.)$.

Exercice 2

1. L'ordre de la formule F est 3.
2. Une première construction de la formule F :

    $A_1 := a$ (atome)

    $A_2 := b$ (atome)

    $A_3 := A_1 \Rightarrow A_2$

    $A_4 := A_1 \wedge A_3$

    $A_5 := A_4 \Rightarrow A_2$

    Une seconde construction de F :

    $B_1 := b$ (atome)

    $B_2 := a$ (atome)

    $B_3 := B_2 \Rightarrow B_1$

    $B_4 := B_2 \wedge B_3$

    $B_5 := B_4 \Rightarrow B_1$

3. Dressons la table de valeurs de la formule F.

a	b	$a \Rightarrow b$	$a \wedge (a \Rightarrow b)$	F
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

    Tous les systèmes d'assignations de valeurs logiques aux atomes a et b, confèrent à la formule F, la valeur logique 1. Donc la formule F est valide.

4. La validité de la formule F est à la base de la règle de détachement (ou règle du modus-ponens.)

Exercice 3

Désignons par G (au lieu de F), la formule proposée. Cette formule est obtenue, à partir de la formule F, de l'exercice 2, en remplaçant l'atome a par la formule propositionnelle A et l'atome b par la formule propositionnelle B. Nous avons prouvé (question 3 de l'exercice 2) que la formule F est valide. Le théorème de substitution permet de conclure que la formule G est valide.