

Licence 1ère année MI, 2020–2021

ANALYSE2

Fiche de TD 3 : Développements limités

Exercice 1. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \ln(1+x)$.

- 1) Écrire la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 4.
- 2) En déduire que $\frac{7}{12} \leq \ln(2) \leq \frac{157}{192}$.

Exercice 2. I) Calculer les développements limités à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= \frac{1}{1-x} - e^x, & 2) f(x) &= \sin(x) \cos(2x), \\ 3) f(x) &= \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right), & 4) f(x) &= \ln(1 + \sinh(x)) \end{aligned}$$

II) Calculer le développement limité des fonctions suivantes

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= \sqrt{x} \quad \text{au voisinage de 2 à l'ordre 3} \\ 2) f(x) &= \cos(x) \quad \text{au voisinage de } \frac{\pi}{6} \quad \text{à l'ordre 3.} \end{aligned}$$

Exercice 3. En utilisant le développement limité, calculer les limites suivantes

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}, & \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}, & \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^x \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan(x)}, & \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}, & \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}. \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2}.$$

1) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0.

2) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 0$ et la position de la courbe de f par rapport à la tangente.

Exercice 5. (Facultatif) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2, montrer que 0.01 est une valeur approchée de $\sin(0.01)$ à 5×10^{-5} près.

Exercice 6. (Facultatif) Soit f une fonction deux fois continûment dérivable en tout point de \mathbb{R} .

1) En utilisant la formule de Taylor, calculer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

2) Si on suppose que la fonction f vérifie

$$f(x) + f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

alors, montrer que f' est croissante.

3) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer la réciproque de la question 2).

Exercice 7. (Facultatif)

1) Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2}$.

3) Montrer que

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Exercice 8. (Facultatif)

Calculer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes

$$1) f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}, \quad 2) f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}, \quad 3) f(x) = (x^3+1)\sqrt{1-x},$$

$$4) f(x) = \ln^3(1+x), \quad 5) f(x) = e^{\sin(x)}, \quad 6) f(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$$

Exercice 9. (Facultatif)

Calculer les limites suivantes

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x}}{3}\right)^x, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - \sin(x)}{\tan(x) - \arcsin(x)}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{\frac{\pi}{2}-x},$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot(x) - \sin(x)}{\tan(x) - \arcsin(x)}, \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(x))}, \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cosh\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{x^2}$$

Exercice 10. (Facultatif)

Soit f la fonction définie par $x \mapsto f(x) = 2x + \sin(x)$.

1) Déterminer un développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

2) Montrer que f est une bijection et que sa fonction réciproque f^{-1} est de classe C^3 . En déduire que f^{-1} a un développement limité à l'ordre 3.

3) On note $f^{-1}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ le développement limité de f^{-1} au voisinage de 0.

Déterminer a_0, a_1, a_2 et a_3 .