Solution TD3. Développements limités.

Ex 1: 1) $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \ln(1+x)$.

Remarquons que f est de classe C^3 sur tout $[a,b] \subset [0,+\infty[$ et de classe C^4 sur $]a,b[$. Ainsi, d'après la formule de Taylor-Lagrange, $\exists\, c \in]a,b[$ tel que pour $x_0 \in [a,b]$,

On a :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0) f'(x_0)}{1!} + \dots + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f^{(3)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^4 f^{(4)}(c)}{4!}$$

On a : $f(x) = \ln(1+x)$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

et $f^{(4)}(x) = \dfrac{-6}{(1+x)^4}$.

Ainsi,

$$\ln(1+x) = \ln(1+x_0) + (x-x_0)\frac{1}{1+x_0} - \frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{1}{(1+x_0)^2}$$
$$+ \frac{(x-x_0)^3}{3}\frac{1}{(1+x_0)^3} - \frac{(x-x_0)^4}{4}\frac{1}{(1+c)^4}$$

2) pour $x_0 = 0$ et $x = 1$, il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$\ln 2 = \ln 1 + 1 - \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} - \frac{1}{4}\frac{1}{(1+c)^4}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4(1+c)^4} = \frac{5}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4}$$

puisque $0 < c < 1 \Rightarrow 1 < 1+c < 2$

$$\Rightarrow 1 < (1+c)^4 < 16$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16} < \frac{1}{(1+c)^4} < 1 \Rightarrow \frac{1}{64} < \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{1}{4}.$$

Ceci implique que:

$$-\frac{1}{4} < \frac{-1}{4(1+c)^4} < -\frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6} - \frac{1}{4} < \frac{5}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{5}{6} - \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{12} < \ln 2 < \frac{157}{192}$$

Ex2: I)

1) On a: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$

et $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$.

Donc,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - e^x = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4)$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + \frac{23}{24}x^4 + o(x^4).$$

2) On a:

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$ et

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$.

Donc,

$$f(x) = \sin x \cos(2x) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4\right) + o(x^4)$$

$$= x - 2x^3 - \frac{x^3}{6} + o(x^4) = x - \frac{13}{6}x^3 + o(x^4).$$

3) On a:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^4).$$

Donc, $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$.

Ainsi,

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right).$$

On pose $u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$. Alors, on a: $x \to 0 \Rightarrow u \to 0$.

Ceci implique que (sachant que $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$)

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right)^2 + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{36}\right) + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4).$$

4) On a:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \Rightarrow \ln(1 + \operatorname{sh} x) = \ln\left(1 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right).$$

posons $u = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ avec $u \to 0$ quand $x \to 0$.

Sachant que

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4),$$ alors

$$\ln(1+\operatorname{sh} x) = \left(x+\frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x+\frac{x^3}{6}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x+\frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^4).$$

$$= x + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{5}{12}x^4 + o(x^4).$$

II) 1) $f(x) = \sqrt{x}$.

puisque f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, alors d'après la formule de Taylor-Young,

$$f(x) = f(2) + \frac{(x-2)}{1!}f'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!}f''(2) + \frac{(x-2)^3}{3!}f^{(3)}(2) + o\left((x-2)^3\right)$$

$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(2) = \sqrt{2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$f''(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{x\sqrt{x}} \Rightarrow f''(2) = -\dfrac{1}{8\sqrt{2}}$

$f^{(3)}(x) = \dfrac{3}{8}\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}} \Rightarrow f^{(3)}(2) = \dfrac{3}{32\sqrt{2}}$

Donc,

$$\sqrt{x} = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2) - \frac{1}{16\sqrt{2}}(x-2)^2 + \frac{1}{64\sqrt{2}}(x-2)^3 + o\left((x-2)^3\right)$$

2) $f(x) = \cos x$.

La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de Taylor-Young,

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(x-\frac{\pi}{6}\right)f'\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2}{2!}f''\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3}{3!}f^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$+ o\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3\right).$$

$f(x) = \cos x \Rightarrow f(\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(\frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f^{(3)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(3)}(\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Ainsi,

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3\right).$$

EX3: 1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-(1+x\varepsilon(x))}{x + x\varepsilon(x)}$, $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\varepsilon(x)}{x(1+\varepsilon(x))} = 0.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = ?$

Calculons le D.L de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de 0 à l'ordre 1,

On a :

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\frac{1}{x}\left[x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right]} = e^{1-\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)}$$

$$= e\, e^{-\frac{x}{2}+o(x)}$$

$$= e\left(1 + \frac{\left(-\frac{x}{2}\right)}{1!} + o(x)\right) = e - \frac{ex}{2} + o(x).$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e - \frac{ex}{2} - e + o(x)}{x} = -\frac{e}{2}.$$

3) $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{7}{x}\right)^x = ?$ posons $t = \frac{1}{x}$, alors $t \to 0$ car $x \to +\infty$.

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x = \lim_{t\to 0}(1+7t)^{\frac{1}{t}} = \lim e^{\frac{1}{t}\ln(1+7t)}$$

$$= \lim_{t\to 0} e^{\frac{1}{t}\left[7t - \frac{(7t)^2}{2} + o(t^2)\right]} = e^7.$$

4) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} e^{-\operatorname{tg} x \ln x}$$

On a :

$\operatorname{tg} x = x + x\,\varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Donc, $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} e^{-(x+x\varepsilon(x))\ln x}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{-x\ln x\,(1+\varepsilon(x))} = e^0 = 1.$$

5) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x^2}{1!}+o(x^2)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

6) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-2x+o(x^3)}{x-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = 2.$$

Ex4: On a: $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

1) posons $t=x+x^2$, $x\to 0 \Rightarrow t\to 0$.

$$\sqrt{1+t}=(1+t)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\frac{t^2}{2}+t^2\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Donc,

$$f(x)=1+\frac{(x+x^2)}{2}-\frac{1}{8}(x+x^2)^2+x^2\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$$

$$=1+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+x^2\varepsilon(x).$$

2) posons $y=1+\frac{x}{2}$. Alors la droite d'équation $y=1+\frac{x}{2}$ est la tangente de la courbe de f en 0. De plus, on a:

$$f(x)-y=\frac{3}{8}x^2+x^2\varepsilon(x).$$

Ainsi, $f(x)-y\geq 0$ au voisinage de 0 et par suite la courbe de f est au dessus de la tangente au voisinage de 0.

Ex5: (Facultatif)

Soit $f: x\mapsto \sin x$ et $x\in[0, 0.01]$.

f est de classe C^1 sur $[0, 0.01]$ et de classe C^2 sur $]0, 0.01[$. Donc d'après le théorème de Taylor-Lagrange,

$\exists c\in\,]0, 0.01[$ tel que

$$\forall x\in[0, 0.01], \quad f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(c).$$

On a:

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f(0)=0$$
$$f'(x)=\cos x \Rightarrow f'(0)=1$$

$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(c) = -\sin c$.

Donc, $\sin x = x + \frac{x^2}{2}(-\sin c)$.

Ainsi, pour $x = 0.01$, on a :

$$\sin(0.01) = 0{,}01 + \frac{0{,}0001}{2}(-\sin c)$$

$$\Rightarrow |\sin(0{,}01) - 0{,}01| = 5 \cdot 10^{-5} |\sin c|$$

$$\Rightarrow |\sin(0{,}01) - 0{,}01| \leq 5 \cdot 10^{-5}.$$

Donc, $0{,}01$ est une valeur approchée de $\sin(0{,}01)$ à $5 \cdot 10^{-5}$ près.

Ex 6 : (Facultatif)

1) puisque f est de classe C^2 dans $\mathbb{R}$, alors $\exists\, \theta_1, \theta_2 \in]0,1[$ tels que

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(x + \theta_1 h)$$

et $$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(x - \theta_2 h).$$

Donc,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+\theta_1 h) + f''(x-\theta_2 h)}{2}$$

Or $\lim_{h \to 0} f''(x+\theta_1 h) = \lim_{h \to 0} f''(x - \theta_2 h) = f''(x)$

(Remarquons que f est continue sur $\mathbb{R}$). Donc,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h} = f''(x).$$

2) puisque f vérifie $f(x)+f(y) \geq 2 f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$,

alors $f(x+h) + f(x-h) \geq 2f(x)$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geq 0$ et par suite f' est croissante sur $\mathbb{R}$.

3) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Supposons que $x \leq y$.
Appliquons le théorème des accroissements finis à f sur les intervalles $\left[x, \frac{x+y}{2}\right]$ et $\left[\frac{x+y}{2}, y\right]$. Alors $\exists c_1 \in \left]x, \frac{x+y}{2}\right[$ et $c_2 \in \left]\frac{x+y}{2}, y\right[$ tels que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) = \left(\frac{x+y}{2} - x\right) f'(c_1)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) = \left(\frac{y-x}{2}\right) f'(c_1) \quad \text{---} (*)$$

et $f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{y-x}{2}\right) f'(c_2) \quad \text{----} (**)$.

D'après $(*)$ et $(**)$, on a :

$$f(x)+f(y) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{y-x}{2}\right)\left(f'(c_2) - f'(c_1)\right).$$

Remarquons que puisque $c_1 \leq c_2$, alors

$$f'(c_2) - f'(c_1) \geq 0 \quad (f' \text{ est croissante sur } \mathbb{R})$$

et $\frac{y-x}{2} \geq 0$ $(y \geq x)$, alors

$\forall x,y \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) + f(y) \geq 2 f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

Ex7 : (Facultatif).

1) La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 en 0 de $\sin x$ est :

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\cos(\theta x)$, pour $\theta \in]0,1[$ dépendant de x.

2) On a:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\cos(\theta x)\right) - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{x}{3} + \frac{x^3}{5!}\cos(\theta x) = 0$$

3) Soit $x \geq 0$. Il est facile de voir que puisque $\cos(\theta x) \leq 1$, alors

$$\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Montrons maintenant que pour $x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$.

posons $f(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$.

On a: $f(0) = 0$, alors si on montre que f est croissante, alors $f(x) \geq 0$.

Calculons $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$.

Notons que $f'(0) = 0$ et $f''(x) > 0$ car $f^{(3)}(0) = 0$.

$f^{(3)}(x) = -\sin x + x > 0$ $(\sin x < x)$ et

Ainsi, $f(x) \geq 0$ si $x \geq 0$, d'où

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

EX8: (facultatif)

① $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{1}{1+x} \cdot \ln(1+x)$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)\right)$$

$$f(x) = x + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3$$
$$+\left(-\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)x^4 + o(x^4)$$
$$= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + \frac{25}{12}x^4 + o(x^4).$$

(2) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$.

On a:
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)$$
et
$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4).$$

Ainsi,
$$f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{5}{64}x^4 + o(x^4).$$

(3) $f(x) = (x^3+1)\sqrt{1-x}$.

On sait que $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)$.

Alors
$$f(x) = (x^3+1)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)\right)$$
$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15}{16}x^3 - \frac{69}{128}x^4 + o(x^4).$$

(4) $f(x) = \ln^3(x+1)$.

On a: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$.

Alors

$$\ln^3(1+x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)^2 \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$$

$$= \left(x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$$

$$= x^3 - \frac{3}{2}x^4 + o(x^4).$$

(5) $f(x) = e^{\sin x}$.

On sait que $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4 \varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

D'autre part, quand $x \to 0$, on a $\sin x \to 0$ et puisque le développement limité de e^h au voisinage de 0 est :

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + h^4 \varepsilon(h), \text{ alors}$$

En posant $h = \sin x$, on a :

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3$$
$$+ \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + x^4 \varepsilon(x).$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4 \varepsilon(x).$$

(6) $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$.

On sait que $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

Donc,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + x^4 \varepsilon(x).$$

Ainsi,

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right)^2 + x^4 \varepsilon(x)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{45} x^4 + x^4 \varepsilon(x)..$$

Ex 9 : (Facultatif).

① $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x}}{3} \right)^x$, $a, b, c > 0$.

posons $t = \frac{1}{x}$. Alors quand $x \to +\infty$, on a $t \to 0$.

Donc,

$$a^{1/x} = a^t = e^{t \ln a} = 1 + t \ln a + \varepsilon(t)$$

$$b^{1/x} = b^t = e^{t \ln b} = 1 + t \ln b + \varepsilon(t)$$

et $c^{1/x} = c^t = e^{t \ln c} = 1 + t \ln c + \varepsilon(t)$, $\varepsilon(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$

Aussi,

$$\ln \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x}}{3} \right)^x = x \ln \frac{1}{3}(a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}})$$

$$= \frac{1}{t} \ln \left[\frac{1}{3} (3 + (\ln a + \ln b + \ln c) t + \varepsilon(t)) \right]$$

$$= \frac{1}{t} \ln \left[1 + \frac{t}{3} \ln(abc) + \varepsilon(t) \right]$$

D'autre part, on sait que

$\ln(1+h) = h + \varepsilon(h)$. posons $h = \frac{t}{3} \ln(abc)$.
($h \to 0$ si $t \to 0$)

Alors,

$$\ln\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^{x} = \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{t}{3}\ln(abc)+\varepsilon(t)\right)$$
$$= \frac{1}{t}\left[\frac{t}{3}\ln(abc)\right]+\varepsilon(t) = \frac{1}{3}\ln(abc).$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^{x} = (abc)^{\frac{1}{3}}.$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x-\sin x}{\operatorname{tg}x-\arcsin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = -1.$$

(3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$. posons $y=\frac{\pi}{2}-x$, alors

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{y\to 0}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)^{y} = \lim_{y\to 0}(\sin y)^{y}$$

$$= \lim_{y\to 0} e^{y\ln(\sin y)} = \lim_{y\to 0} e^{y\ln\left(y-\frac{y^3}{3!}+o(y^3)\right)}$$

$$= \lim_{y\to 0} e^{y\ln\left[y\left(1-\frac{y^2}{6}+o(y^2)\right)\right]} = \lim_{y\to 0} e^{y\ln y}\, e^{y\ln\left(1-\frac{y^2}{6}+o(y^2)\right)}$$

$$= \lim_{y\to 0} e^{y\ln y}\, e^{y\left(-\frac{y^2}{6}+o(y^2)\right)} = \lim e^{y\ln y}\, e^{-\frac{y^3}{6}+o(y^3)}$$

$$= 1$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x-\sin x}{\operatorname{tg}x-\arcsin x} = ?$$

On a : $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$,

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$

$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

et $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$.

Donc,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \arcsin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + x^3\varepsilon(x)}{\left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \left(x + \frac{x^3}{6}\right) + x^3\varepsilon(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)}{\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)} = -1.$$

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} = ?$

On sait que $\cos h = 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$. Ainsi,

$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)$ et

$\cos(3x) = 1 - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2)$.

D'autre part, $\ln(1+h) = h + o(h)$. Donc,

$\ln(\cos(2x)) = \ln\left(1 - \frac{2x^2}{2} + o(x^2)\right)$

$= -\frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = -2x^2 + o(x^2)$

et $\ln(\cos(3x)) = -\frac{(3x)^2}{2} + o(x^2) = -\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$.

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2 + o(x^2)}{-\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{4}{9}.$$

(6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[ch\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]^{x^2} = ?$ posons $t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{t}$

$x \to +\infty \Rightarrow t \to 0$.

Ainsi,

$$\left[ch\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]^{x^2} = (ch\, t^2)^{\frac{1}{t^2}} = e^{\frac{1}{t^2} \ln(ch\, t^2)}$$

$$= e^{\frac{1}{t^2} \ln\left(1 + \frac{t^4}{2!} + t^4 \varepsilon(t)\right)} = e^{\frac{1}{t^2}\left[\frac{t^4}{2!} + t^4 \varepsilon(t)\right]}, \quad \varepsilon(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$= e^{\frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon(t)}$$

Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[ch\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]^{x^2} = \lim\limits_{t \to 0} e^{\frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon(t)} = 1$.

Ex 10 : (Facultatif).

1) On a : $f(x) = 2x + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$= 3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

2) Remarquons que $f'(x) = 2 + \cos x > 0$.

De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Ainsi,

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc c'est une bijection.

$\Rightarrow f^{-1}$ existe et c'est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarquons aussi que puisque f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, alors f^{-1} est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc admet un développement limité au voisinage de 0.

3) On a $f(0)=0$. Ceci implique qu'on peut appliquer la formule du D.L de f^{-1} à f au voisinage de 0.

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1\left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + a_2\left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2$$

$$+ a_3\left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) = x$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1\left(3x - \frac{x^3}{6}\right) + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3) = x$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3a_1 x + a_2 x^2 + \left(-\frac{a_1}{6} + a_3\right)x^3 + o(x^3) = x.$$

par identification, on a :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ 3a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ -\frac{a_1}{6} + a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1/3 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \frac{1}{18} \end{cases}$$

Ainsi,

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{18}x^3 + o(x^3).$$