Solution TD1 : Les fonctions élémentaires.

Exercice 1 :

1) • On a $\dfrac{tg\,x}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \dfrac{\sin x}{\cos x\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}} = \dfrac{\sin x}{\cos x\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}}$

$$= \frac{\sin x\,|\cos x|}{\cos x}.$$

puisque $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, alors $\dfrac{tg\,x}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \sin x.$

• On sait que $\cos x = \dfrac{\sin x}{tg\,x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}}$ car $x \neq 0$.

2) On a, $0 < \dfrac{3}{4} < 1 \Rightarrow \operatorname{arctg} 0 < \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right) < \operatorname{arctg} 1$

($\operatorname{arctg} x$ est une fonction croissante). Ainsi,

$$0 < \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4}$$

D'autre part,

$0 < \dfrac{5}{12} < 1 \Rightarrow \operatorname{arctg} 0 < \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right) < \operatorname{arctg} 1$

$\Rightarrow 0 < \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{4}.$

En additionnant les deux inégalités, on obtient :

$$0 < \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

3) On a : $\arcsin x = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)$

$\Leftrightarrow x = \sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)\right)$

On sait que

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

Ainsi,

$$X = \sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right)\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)\right) + \sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)\right)\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{tg\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right)}{\sqrt{1+tg^2\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)\right)}} + \frac{tg\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)\right)}{\sqrt{1+tg^2\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)\right)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right)}}$$

$$= \frac{3/4}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{25}{144}}} + \frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{1+\frac{25}{144}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \boxed{\frac{56}{65}}$$

Exercice 02 :

1) La dérivée de $\arcsin x$ est

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1,1[\text{ et}$$

la dérivée de $\arccos x$ est :

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1,1[.$$

2) On remarque que

$f'(x) = 0$ où $f(x) = \arcsin x + \arccos x$.

Ceci implique que f est constante sur $]-1,1[$

puisque $f(0) = \frac{\pi}{2}$, donc on obtient que $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 03 : On pose $\alpha = \frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}$, alors $x = \ln(tg\alpha)$.

$$ch\,x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \frac{e^{\ln(tg\alpha)} + e^{-\ln(tg\alpha)}}{2} = \frac{tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha}}{2}$$

$$= \frac{tg^2\alpha + 1}{2\,tg\alpha} = \frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1}{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$= \frac{1}{2\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin(y+\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos y}$$

$$sh\,x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \frac{tg^2\alpha - 1}{2\,tg\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

$$= \frac{-\cos(y+\frac{\pi}{2})}{\sin(y+\frac{\pi}{2})} = \frac{\sin y}{\cos y} = tg\,y$$

Exercice 04 :

1) On a : $ch\,x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$, donc

$$ch\left(\tfrac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln 3} + e^{-\frac{1}{2}\ln 3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

et $sh\,x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$, donc

$$sh\left(\tfrac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln 3} - e^{-\frac{1}{2}\ln 3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2) Montrons que

$$ch(x+y) = ch\,x\,ch\,y + sh\,x\,sh\,y \quad \dots (*)$$

Remarquons que

$$\text{ch}\,x + \text{sh}\,x = e^{x} \quad \text{et} \quad \text{ch}\,x - \text{sh}\,x = e^{-x}.$$

Alors,

$$\text{ch}(x+y) + \text{sh}(x+y) = e^{x+y} = e^{x}e^{y}$$

$$= (\text{ch}\,x + \text{sh}\,x)(\text{ch}\,y + \text{sh}\,y)$$

$$= \text{ch}\,x\,\text{ch}\,y + \text{sh}\,x\,\text{ch}\,y + \text{ch}\,x\,\text{sh}\,y + \text{sh}\,x\,\text{sh}\,y \quad \cdots (1)$$

D'autre part

$$\text{ch}(x+y) - \text{sh}(x+y) = e^{-x-y} = e^{-x}e^{-y}$$

$$= (\text{ch}\,x - \text{sh}\,x)(\text{ch}\,y - \text{sh}\,y)$$

$$= \text{ch}\,x\,\text{ch}\,y - \text{sh}\,x\,\text{ch}\,y - \text{ch}\,x\,\text{sh}\,y + \text{sh}\,x\,\text{sh}\,y \quad \cdots (2)$$

En additionnant les deux formules (1)+(2), on obtient :

$$2\,\text{ch}(x+y) = 2\,\text{ch}\,x\,\text{ch}\,y + 2\,\text{sh}\,x\,\text{sh}\,y$$, d'où la formule (*).

3) On a : $2\,\text{ch}\,x + \text{sh}\,x = \sqrt{3}\,\text{ch}(5x)$.

On multiplie par $\frac{\sqrt{3}}{3}$, on obtient :

d'après (2)

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{ch}\,x + \frac{\sqrt{3}}{3}\text{sh}\,x = \text{ch}(5x) \iff \text{ch}\left(\frac{\ln 3}{2} + x\right) = \text{ch}(5x)$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\ln 3}{2} + x = 5x \\ \frac{\ln 3}{2} + x = -5x \end{cases} \iff \begin{cases} 4x = \frac{\ln 3}{2} \\ -6x = \frac{\ln 3}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{\ln 3}{8} \\ x = -\frac{\ln 3}{12} \end{cases}.$$

Exercice 05: On a :

$$\ln(\operatorname{ch} x) = 2 \iff \operatorname{ch} x = e^2$$

$$\iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^2 \iff e^x + \frac{1}{e^x} = 2e^2.$$

On pose $X = e^x$, alors

$$\ln(\operatorname{ch} x) = 2 \iff X + \frac{1}{X} = 2e^2.$$

$$\iff X^2 + 1 = 2Xe^2$$

$$\iff X^2 - 2Xe^2 + 1 = 0$$

$\Delta = 4e^4 - 4 = 4(e^4 - 1) > 0$. Donc, les racines sont

$$X_1 = \frac{2e^2 - 2\sqrt{e^4-1}}{2} = e^2 - \sqrt{e^4-1}$$

et

$$X_2 = \frac{2e^2 + 2\sqrt{e^4-1}}{2} = e^2 + \sqrt{e^4-1}.$$

Remarquons que $e^4 > e^4 - 1$ et donc $e^2 > \sqrt{e^4-1}$

$\Rightarrow X_1 > 0$ ($X_2 > 0$ évident).

Ainsi, les solutions de $\ln(\operatorname{ch} x) = 2$ sont

$$x_1 = \ln\left(e^2 - \sqrt{e^4-1}\right) \quad \text{et} \quad x_2 = \ln\left(e^2 + \sqrt{e^4-1}\right).$$

Exercice 06: On a :

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

1) pour que la fonction f soit bien définie, il faut que

$$-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1.$$

Remarquons que

$$1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 = \frac{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+2x^2+x^4) - (1-2x^2+x^4)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$$

Donc

$\forall x \in \mathbb{R}$,
$$1 \geq \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$

Donc, f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) pour simplifier le calcul de la dérivée, on pose

$$u(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$ Alors $f(x) = \arccos(u(x))$.

On a:

$$f'(x) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}.$$

D'autre part,
$$u'(x) = \frac{(-2x)(1+x^2) - (1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-4x}{(1+x^2)^2}.$$

Ainsi, $$f'(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1+x^2}{2|x|}$$

Donc,

$$f'(x) = \frac{2x}{|x|(1+x^2)}, \quad x \neq 0.$$

f est dérivable pour tout $x \neq 0$.

pour le point 0 :

En 0^-, $x < 0$ et $|x| = -x$, on a :

$$f'(x) = \frac{-2}{1+x^2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -2$$

En 0^+, $x > 0$ et $|x| = x$, on a :

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 2$$

Donc, f n'est pas dérivable en 0.

3) On a : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \arccos u(x)$

Sachant que $\lim_{x \to +\infty} u(x) = -1$, alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \arccos(-1) = \pi$$

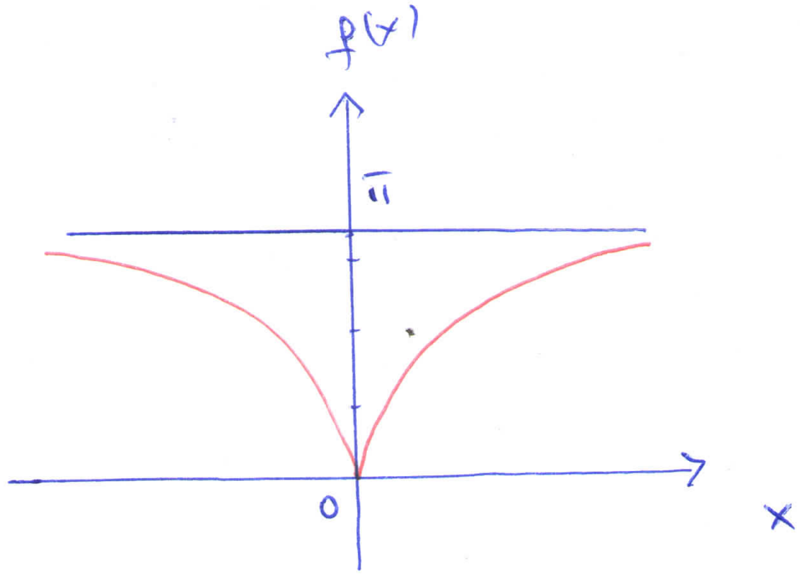
et on a :

quand $x \to -\infty$, $u(x) \longrightarrow -1$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \arccos(-1) = \pi$$

4) Le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	π



Le graphe de f.

Ex7 : (Facultatif).

① $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = $

$]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[:= D_f$.

$\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2+x^2} > 0$

$\Rightarrow$ La fonction f est strictement croissante.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = ?$

On a :

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$ et $\operatorname{arctg} 0 = 0$.

	-1		1	
$-$		$+$		$-$

le signe de $1-x^2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{0^-}\right) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{0^+}\right) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

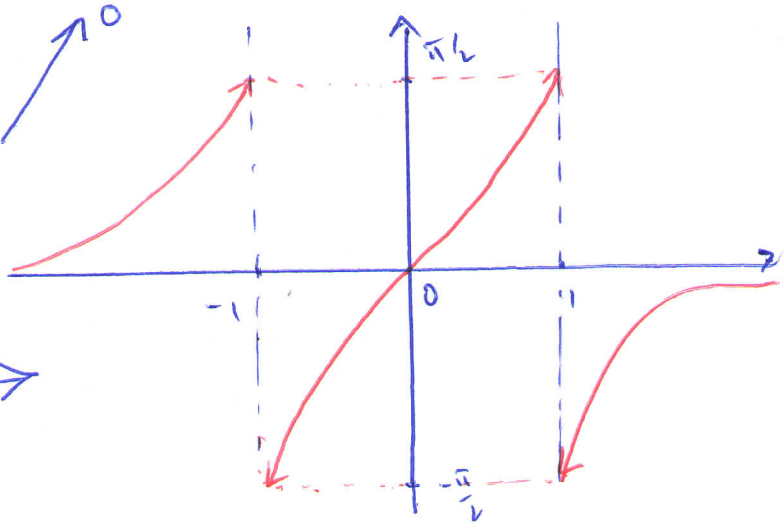
$\lim\limits_{x \to -1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{0^+}\right) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{0^-}\right) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	||	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$ || $-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$ || $-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0

Le graphe de f $\rightarrow$



(2) $f(x) = \text{th}\left(\frac{1}{x}\right)$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

$$\forall x \neq 0,\quad f'(x) = \frac{\left(\text{sh}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'} = \frac{-\frac{1}{x^2}\,\text{ch}^2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\,\text{sh}^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\text{ch}^2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\,\frac{\left[\text{ch}^2\left(\frac{1}{x}\right) - \text{sh}^2\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{\text{ch}^2\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{-1}{x^2\,\text{ch}^2\left(\frac{1}{x}\right)} < 0.$$

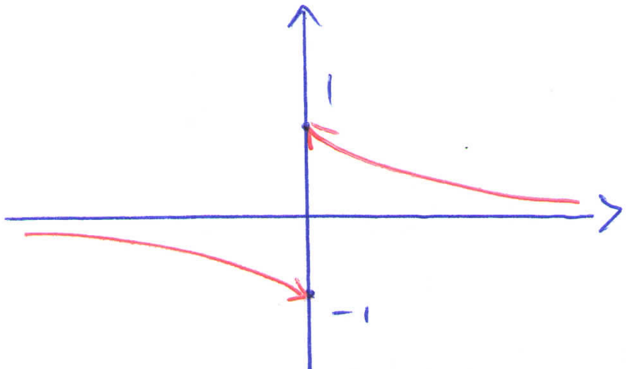
$$\lim_{x\to\pm\infty} \text{th}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\text{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \text{th}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(1 - e^{-\frac{2}{x}}\right)}{e^{\frac{1}{x}}\left(1 + e^{-2/x}\right)} = 1$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \text{th}\left(\frac{1}{x}\right) = -1$. Ainsi le tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	1 || 1	$\searrow$	0



Le graphe de f.

Ex 3 : (Facultatif) :

1) $ch(x) = \sqrt{5} \Rightarrow \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow e^x + e^{-x} = 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow e^{2x} - 2\sqrt{5}\, e^x + 1 = 0$

on pose $X = e^{2x}$, on obtient :

$X^2 - 2\sqrt{5}\, X + 1 = 0$, $\Delta = 16$,

$X_1 = \sqrt{5} + 2$, $X_2 = \sqrt{5} - 2$

Ainsi, $e^{x_1} = \sqrt{5} + 2$ et $e^{x_2} = \sqrt{5} - 2$

$\Rightarrow x_1 = \ln(\sqrt{5}+2)$ ou $x_2 = \ln(\sqrt{5}-2)$.

2) $\arcsin x = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

On a : $\begin{cases} y = \arcsin x \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = x \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

Remarquons que

$0 \leq \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \leq \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} \leq -\arccos\left(\frac{1}{4}\right) \leq 0$. Donc

$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \arccos\left(\frac{1}{4}\right) \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

Ainsi

$$x = \sin\left(\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right) - \arccos\left(\tfrac{1}{4}\right)\right)$$

$$= \sin\left(\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)\cos\left(\arccos\left(\tfrac{1}{4}\right)\right) - \sin\left(\arccos\left(\tfrac{1}{4}\right)\right)\cos\left(\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)$$

$$= \left(\sqrt{1-\frac{1}{3^2}}\right)\left(\frac{1}{4}\right) - \left(\sqrt{1-\frac{1}{4^2}}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{15}}{12}.$$

3) $\quad \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) = \pi$

La fonction arctg est à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc cette équation n'a pas de solutions.

Ex 9 : (Facultatif) :

1) On a :

$$\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x} = \frac{1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{1+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}} = \frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x+\sin^2x} = \cos^2x-\sin^2x$$

$$= \cos(2x).$$

2) On a :

$$\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{3}\right)\right) = \frac{1-tg^2\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{1+tg^2\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

Comme $0 < \frac{1}{3}$ et arctg est croissante, alors

$$\operatorname{arctg} 0 < \operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < 2\operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{3}\right) < \pi.$$

Ainsi, $\cos\left(2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{4}{5} \Rightarrow 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

Ex10: (Facultatif)

1) Si $x \leq 0$, alors $\mathrm{arctg}(2x) \leq 0$

et $\frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}(2x) \geq \frac{\pi}{4}$ impossible,

donc, il n'y a pas de solutions négative.

2) On a : $0 < \mathrm{arctg}\,x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\mathrm{arctg}\,x < 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}\,x < \frac{\pi}{4}.$$

Donc, $\frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}\,x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi,

$$\mathrm{arctg}(2x) = \frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}\,x \Leftrightarrow 2x = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}\,x\right).$$

par conséquent,

$$2x = \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)}{1 + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)} = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\Leftrightarrow 2x(1+x) = 1-x \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

Ceci implique qu'il y a deux solution

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}, \quad x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}.$$

puisque $x > 0$, alors On solution de (1) est

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}.$$