Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2020-2021
Semestre 2

1ère Année LMD Mathématique et Informatique — Algèbre 2

Fiche de TD 2 : Les applications linéaires

Exercice 1 :

Les applications suivantes de E dans F sont elles linéaires ? Si oui, déterminer une base du noyau et une base de l'image.

1. $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (2x + 3y, x)$.
2. $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (y, x + y + 1)$.
3. $E = \mathbb{R}^3, F = \mathbb{R}, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = x + 2y + z$.
4. $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (x + y, xy)$.
5. $E = F = \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2$.

Exercice 2 :

Donner dans chaque cas la dimension du noyau de f, puis le rang de f.
L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (y, z, x)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z)$.
5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x + my - z, 2x + 2y, x - 2z)$, selon la valeur du paramètre réel m.

Exercice 3 :

Soit $\mathbb{R}_4[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4.Montrer que l'application f de $\mathbb{R}_4[X]$ dans lui même, définie par $f(P) = P - P'$ est linéaire. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4 :

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (-x + 2y + z, y + 3z, 2x - 2y + 4z).$$

a. Donner une base de l'image et une base du noyau de f. Décrire l'image de f par un système d'équations linéaires.

b. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x = y$. Quelle est la dimension de E ? Donner une base de $f(E)$ et une base de $f^{-1}(E)$.

Exercice 5 :

Soit $f : \mathbb{R}_{n+1}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = (n + 1)P - XP'$.

1. Justifier que f est bien définie et que c'est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Montrer que f est surjective.