Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2020-2021
Semestre 2

1ère Année LMD Mathématique et Informatique — Algèbre 2

Fiche de TD 01 : Les espaces vectoriels

Exercice 1 :

Soit $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels, muni de l'addition des polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un réel.

a. Montrer que $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b. Que se passe-t-il si on prend $\mathbb{R}[X]_{=n}$?

Exercice 2 :

Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

1) $E_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x = t \text{ et } y = z\}$
2) $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 1\}$
3) $E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + xy \geqslant 0\}$
4) $E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geqslant 1\}$
5) $E_5 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | f(0) = 1\}$
6) $E_6 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | f(1) = 0\}$
7) $E_7 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | f \text{ est croissante }\}$
8) $E_8 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} | (u_n) \text{ tend vers } 0\}$

Exercice 3 :

Les familles suivantes sont-elles libres ?

i. $u_1 = (1,0,1), u_2 = (0,2,2)$ et $u_3 = (3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

ii. $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,1)$ et $v_3 = (1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 :

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants :

$E_1 = \{(a+b, b-3a, a) \in \mathbb{R}^3 | a,b \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{(c,-2c,c) \in \mathbb{R}^3 | c \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.
3. En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.
4. A-t-on $E_1 \bigoplus E_2 = \mathbb{R}^3$?

Exercice 5 :

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(-1) = P(1) = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de E.