Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2020/2021

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

1ère année M.I - Semestre 2

Examen de rattrapage : Analyse 2

Durée : 1h30mn

Aucun document n'est autorisé.
L'usage de tout appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (7 Pts).

Soient

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx$$

1) Sans calculer I et J, montrer que $I = J$.

2) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)+\sin(x) = \sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$.

3) En déduire que

$$I + J = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)}. \tag{1}$$

4) Calculer $I+J$. En déduire I et J.

Exercice 2. (4 Pts)

1) Trouver les valeurs des constantes a et b telles que

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{a}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{b}$$

2) En déduire l'aire de la surface délimitée par la courbe d'équation $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}$, l'axe des x et les droites d'équations $x = \sqrt{2}$ et $x = 2$.

Exercice 3. (5 Pts).

Soit f la fonction définie sur $]-1,+1[$ par $f(x) = \sinh\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$.

1) Calculer $f(0)$.

1) Calculer la dérivée de f sur $]-1,+1[$.

2) En déduire que f est bijective de $]-1,+1[$ sur $\mathbb{R}$.

3) On note par f^{-1} la fonction réciproque de f sur $]-1,+1[$. Calculer $(f^{-1})'(0)$. (on ne demande pas de calculer l'expression de f^{-1}, ni celle de la dérivée de f^{-1}.).

Exercice 4. (4 Pts).

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-2x}\sin(x)$.

1) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f.

2) En déduire

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^{-2x}\sin(x)}{x}$$

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2020/2021

1ère année M.I - Semestre 2

Corrigé de l'examen de rattrapage : Analyse 2

Durée : 1h30mn

Partie1

Exercice 1. (7 Pts).

1) Remarquons que

$$I - J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx = \int_0^{\pi/2} (\cos(x) - \sin(x)) dx$$

$$= [\sin(x) + \cos(x)]_0^{\pi/2} = (\sin(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2})) - (\sin(0) + \cos(0)) = 0.$$

Ainsi, $I = J$. **(1 Pt)**

2) On a

$$\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos(x)\cos(\pi/4) + \sin(x)\sin(\pi/4))$$

$$= \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)) = \cos(x) + \sin(x). \quad (\mathbf{1Pt})$$

3) Remarquons encore que

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos(x) + \sin(x)} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos(x) + \sin(x)}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})}. \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

Posons $u = x - \frac{\pi}{4}$. Alors $du = dx$. **(0.5 Pt)**

Aussi,

$$x = 0 \Rightarrow u = -\frac{\pi}{4} \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}. \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

Donc,

$$I + J = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{du}{\cos(u)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{du}{\cos(u)}. \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

4) Pour calculer $I + J$, on pose $u = \tan(\frac{x}{2})$. Alors, on a

$$dx = \frac{2du}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Pour $x = -\frac{\pi}{4}$, on a $u = \tan(-\frac{\pi}{8})$ et pour $x = \frac{\pi}{4}$, on a $u = \tan(\frac{\pi}{8})$. Sachant que

$$\cos(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}} \quad \sin(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}},$$

alors

$$\sin(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})} \quad \text{et} \quad \cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})}$$

Donc,

$$\tan(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sin(\pi/8)}{\cos(\pi/8)} = \sqrt{2}-1 \quad \text{et} \quad \tan(-\frac{\pi}{8}) = -\sqrt{2}+1.$$

Ainsi,

$$I+J = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \sqrt{2}\int_{-\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} \frac{du}{1-u^2}.$$

On a

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u}$$

qui donne par identification $a = 1/2$ et $b = 1/2$.
Par conséquent,

$$\sqrt{2}\int_{-\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} \frac{du}{1-u^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\int_{-\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} \frac{du}{1-u} + \int_{-\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} \frac{du}{1+u}\right].$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[-\ln(1-u)+\ln(1+u)\right]_{-\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[2\ln(\sqrt{2}) - 2\ln(2-\sqrt{2})\right] = \sqrt{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1). \quad (\mathbf{3Pts})$$

5) On a

$$\begin{cases} I-J=0 \\ I+J=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1) \end{cases} \qquad (\mathbf{0.25Pt})$$

Donc,

$$I = J = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2}+1). \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

Exercice 2. (4 Pts).

1) On a

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{ab+x^2-1}{b\sqrt{x^2-1}}$$
$$= \frac{\frac{ab}{b}+\frac{x^2}{b}-\frac{1}{b}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Par identification

$$\begin{cases} \frac{ab}{b}-\frac{1}{b}=0 \\ \frac{1}{b}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \quad (\mathbf{0.5Pt}) \\ b=1 \quad (\mathbf{0.5Pt}) \end{cases}$$

2) On note par D, l'aire de la surface délimitée par la courbe d'équation $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}$, l'axe des x et les droites d'équations $x=\sqrt{2}$ et $x=2$. Alors,

$$Aire(D) = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}dx \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} x\sqrt{x^2-1}dx$$

On pose $u = x^2-1$. Alors, $du = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}du$. **(0.5 Pt)**
Aussi,

$$x=\sqrt{2} \Rightarrow u=1 \quad \text{et} \quad x=2 \Rightarrow u=3. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Ainsi,

$$Aire(D) = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{u}du. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

$$= \left[\sqrt{u}\right]_1^3 + \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^3 = 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}. \quad (\mathbf{1Pt})$$

Exercice 3. (5 Pts).

1) On a $f(0) = sinh(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0.$ **(0.5 Pt)**

2) La dérivée de f est

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' \cosh(\frac{x}{1-x^2}) = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\cosh(\frac{x}{1-x^2}). \quad (\mathbf{1.5Pts})$$

3) Remarquons que pour tout $x \in]-1, +1[$, on a $f'(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante et donc bijective. **(1 Pt)**

4) On sait que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \quad (\mathbf{1Pt})$$

Donc,

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))}.$$

Sachant que $f^{-1}(0) = 0$, alors

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0} = \frac{1}{f'(0)}$$

$$= \frac{1}{\cosh(0)} = 1. \quad (\mathbf{1Pt})$$

Exercice 4. (4 Pts).

1) On sait que

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o(u^3) \quad (\mathbf{1Pt})$$

et

$$\sin(u) = u - \frac{u^3}{3!} + o(u^3). \quad (\mathbf{1Pt})$$

Alors,

$$f(x) = 2e^{-2x}\sin(x) = 2\left(1 - 2x + \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= 2x - 4x^2 + \frac{11}{3}x^3 + o(x^3). \quad (\mathbf{1Pt})$$

2) On a

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-2x}\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2 - 4x + \frac{11}{3}x^2 + o(x^2) = 2 \quad (\mathbf{1Pt})$$