Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2020-2021

1ère Année LMD MI

Durée : 01H30.

Examen de rattrapage : Algèbre 2

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 :

Soient les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:
$u = (a, a-b, a), v = (b, b-a, b)$ oû $a, b \in \mathbb{R}^*$.
Trouver une relation entre a et b pour que la famille $\{u, v\}$ soit libre dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 :

Soient

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0, 2x - y - z = 0\}$$

et

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$$

deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.
On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Soient $a = (1, 1, 1), b = (1, 0, 1)$ et $c = (0, 1, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.
3. Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Soit $u = (x, y, z)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Exercice 3 :

Soit f une application linéaire de matrice associée

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

dans les bases canoniques.

1. Quelle est l'image par f des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.
2. Trouvez tous les $x \in \mathbb{R}^2$ tels que $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Trouvez tous les $x \in \mathbb{R}^2$ tels que $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Université Abou Bekr Belkaid

AU 2020/2021

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Corrigé Rattrapage (Sem 2)

Algèbre 2 (L1MI)

Exercice 1 (04pts)

$u = (a, a-b, a)$, $v = (b, b-a, b)$; $a, b \in \mathbb{R}^*$.

$\{u, v\}$ libre ds $\mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow \left(\alpha u + \beta v = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \right)$ 01pt

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v &= \alpha(a, a-b, a) + \beta(b, b-a, b) \\ &= (\alpha a, \alpha(a-b), \alpha a) + (\beta b, \beta(b-a), \beta b) \\ &= (\alpha a + \beta b, \alpha(a-b) + \beta(b-a), \alpha a + \beta b) \end{aligned}$$ 0,5pt

$$\alpha u + \beta v = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha a + \beta b = 0 \\ \alpha(a-b) + \beta(b-a) = 0 \\ \alpha a + \beta b = 0 \end{cases}$$ 0,5pt

01pt

Ce système admet la solution triviale $(\alpha, \beta) = (0,0)$ ssi

$b^2 - a^2 \neq 0$ 01pt

Exercice 2 (10pts)

$E = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y-2z = 0 \text{ et } 2x-y-z=0 \}$

$F = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y-z = 0 \}$

$a=(1,1,1)$, $b=(1,0,1)$, $c=(0,1,1)$

1- Mq E s.e.v de $\mathbb{R}^3$:

① $(0,0,0)\in E$ car $0+0-2\times 0=0$ (0,5pt)

② $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall u,v\in E$: $\alpha u+\beta v\overset{?}{\in} E$ (0,5pt)

$$\alpha u+\beta v=\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')$$

$u=(x,y,z)$

$v=(x',y',z')$

$$=(\underbrace{\alpha x+\beta x'}_{X},\ \underbrace{\alpha y+\beta y'}_{Y},\ \underbrace{\alpha z+\beta z'}_{Z})$$

$$=(X,Y,Z)$$

$\alpha u+\beta v\in E$ si $X+Y-2Z=0$

$$X+Y-2Z=(\alpha x+\beta x'),(\alpha y+\beta y')-2(\alpha z+\beta z')$$

$$=\alpha\underbrace{(x+y-2z)}_{\substack{0\\ \text{car } u\in E}}+\beta\underbrace{(x'+y'-2z')}_{\substack{0\\ \text{car } v\in E}}$$

(01pt)

Cl: E s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

2- Soit $u=(x,y,z)\in E \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 & ① \\ 2x-y-z=0 & ② \end{cases}$

①+② $\Rightarrow 3x-3z=0 \Rightarrow x=z$ (01pt)

Remplaçons ds ② $\Rightarrow 2z-y-z=0 \Rightarrow z=y$

donc $u=(x,x,x)=x\underbrace{(1,1,1)}_{w_1} \Rightarrow \{\underset{a}{w_1}\}$ famille génératrice de E

-2-

c'est une base car elle est libre. en effet

$$\alpha a = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = 0$$

0,1pt

3 - Mq $\{b, c\}$ est une base de F : Car :

① libre $\quad \alpha b + \beta c = (0,0,0) \Rightarrow \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

0,1pt

② génératrice

soit $u = (x, y, z) \in F \Rightarrow u = (x, y, \overbrace{x+y}^{z})$

$$\Rightarrow u = (x, 0, x) + (0, y, y)$$

$$\Rightarrow u = x\underbrace{(1,0,1)}_{b} + y\underbrace{(0,1,1)}_{c}$$

0,1pt

cl $\{b, c\}$ une base de F.

4 - $\{a, b, c\}$ libre de $\mathbb{R}^3$ car :

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = (0,0,0) \Rightarrow \alpha(1,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,1) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

0,1pt

5- Oui $E \oplus F = \mathbb{R}^3$ car $\left\{\begin{array}{l} \underset{1}{\dim E} + \underset{2}{\dim F} = \underset{3}{\dim \mathbb{R}^3} \\ \text{et} \quad E \cap F = \{(0,0,0)\} \end{array}\right.$

01pt

6-

$u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimons u dans la base $\{a, b, c\}$

$$u = (x,y,z) = \alpha a + \beta b + \gamma c$$
$$= \alpha(1,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,1)$$
$$= (\alpha+\beta, \alpha+\gamma, \alpha+\beta+\gamma)$$

02pts

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha+\beta \\ y = \alpha+\gamma \\ z = \alpha+\beta+\gamma \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = y - z + x \\ \gamma = z - x \\ \beta = z - y \end{array}\right.$$

donc $u = (y-z+x)\underbrace{(1,1,1)}_{a} + (z-y)\underbrace{(1,0,1)}_{b} + (z-x)\underbrace{(0,1,1)}_{c}$

$\boxed{\text{Exercice 3: (06pts)}}$

$$A = \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} e_1 = (1,0) \\ e_2 = (0,1) \end{array}$$

1- (01pt) $f(1,2) = f(e_1 + 2e_2) = f(e_1) + 2f(e_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(01pt) $f(-1,-5) = f(-e_1 - 5e_2) = -f(e_1) - 5f(e_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

2- $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ (02pts)

3- $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ (02pts)