Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2020/2021

1ère année M.I - Semestre 2

Examen final : Analyse 2

Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.
Note EF=Partie1+Partie2.
Note CC= Max(Partie1, Partie2)×2

Partie1

Exercice 1. (10 Pts)

I) 1) Déterminer les constantes a, b et c telle que

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x^2+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+2}.$$

2) Calculer l'intégrale indéfinie suivante

$$I = \int f(x)dx.$$

3) En déduire l'intégrale définie $\int_0^1 f(x)dx$.

II) On considère la fonction $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = x\ln(x)$. On note par (C_g) la courbe représentative de g.
Calculer l'aire du domaine délimité par (C_g), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Partie 2.

Exercice 2. (4 Pts)

Soit la fonction $f : [-1, 1] \to [0, 1]$ définie par $f(x) = \sin(\arccos(x))$.
1) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
2) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
3) En utilisant la dérivée, montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Exercice 3. (6 Pts)

1) Donner le développement limité à l'ordre 4 a voisinage de 0 de $x \to \ln(\cos(x))$.
2) En déduire la limite suivante $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x}}$
3) Donner l'équation de la tangente T à la courbe de f telle que $f(x) = \ln(\cos(x)) - \frac{2}{1+x}$ en $x = 0$ et préciser la position de T par rapport à la courbe au point 0.

On donne :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + +x^n\varepsilon(x)$$

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2020/2021

1ère année M.I - Semestre 2

Corrigé de l'examen final : Analyse 2

Durée : 1h30mn

Partie1

Exercice 1. (10 Pts).

I) On a

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x^2+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+2}$$
$$\frac{(a+b)x^2 + (2b+c)x + (2a+2c)}{(x+2)(x^2+2)}.$$

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2b+c=-1 \\ 2(a+c)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-1 \end{cases} \quad (\mathbf{1.5Pts})$$

Donc,

$$f(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2+2}.$$

2) On a

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{dx}{x^2+2}.$$

Alors,

$$\int \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad (\mathbf{1Pt})$$

et

$$\frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

On pose $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$ $(\mathbf{0.25Pt}) \Rightarrow dx = \sqrt{2}dt.$ $(\mathbf{0.25Pt})$ Donc,

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}dt}{t^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan t + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + c_2. \quad (\mathbf{1.25Pt})$$

Ainsi,

$$\int f(x)dx = \ln|x+2| - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + c, c \in \mathbb{R}. \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

3) On a
$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\ln|x+2| - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^1$$
$$= \left(\ln(3) - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\ln(2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan 0\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (\mathbf{1Pt})$$

II) On a $g(x) = x\ln(x)$. On note par D le domaine délimité par la courbe C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. Alors,
$$Aire(D) = \int_1^e g(x)dx = \int_1^e x\ln(x)dx. \quad (\mathbf{1Pt})$$

Calculons cette intégrale par une intégration parties. On pose
$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases} \quad (\mathbf{1Pt})$$

Ainsi,
$$Aire(D) = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx \quad (\mathbf{1Pt})$$
$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4}. \quad (\mathbf{1Pt})$$

Partie 2

Exercice 2. (4 Pts).

Remarquons que la fonction f est continue sur $[-1,+1]$ et dérivable sur $]-1,+1[$.

1)
$$f(0) = \sin(\arccos 0) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$
$$f(1) = \sin(\arccos 1) = \sin(0) = 0 \quad (\mathbf{0.5Pt})$$
$$f(-1) = \sin(\arccos(-1)) = \sin(\pi) = 0 \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

2) On a
$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos(\arccos x), \quad x \in]-1,+1[$$
$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\mathbf{1Pt})$$

3) Remarquons que pour $x \in]-1,+1[$, on a
$$f(x) = \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + C. \quad (\mathbf{1Pt})$$

Sachant que $f(0) = 1 = \sqrt{1-0} + C$, alors $C = 0$. **(0.5 Pt)**

Ainsi,
$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in]-1,+1[.$$

Maintenant, puisque $f(1) = f(-1) = 0$, alors cette égalité est aussi vraie aux bornes 1 et -1.

Exercice 3. (6 Pts).

1) On va utiliser le théorème de composition des DLs. Pour cela, on a

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon_1(x), \quad \varepsilon_1(x) \to 0 \quad \text{quand} \quad x \to 0,$$

et

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon_2(u), \quad \varepsilon_2(u) \to 0 \quad \text{quand} \quad u \to 0.$$

On pose $u = \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_1(x)$, **(0.5 Pt)** alors

$$\ln(\cos(x)) = \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + x^4\varepsilon(x)$$

$$= \frac{-x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4\varepsilon(x). \quad \textbf{(1.5Pts)}$$

2) On remarque que

$$\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(\cos(x))} \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\left[\frac{-x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right]} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-x}{2}+x\varepsilon(x)} = 1 \quad \textbf{(1Pt)}$$

3) Remarquons que le DL de $\frac{1}{x+1}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 est

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

Alors, le DL de f à l'odre 2 au voisinage de 0 est

$$f(x) = \frac{-x^2}{2} - 2(1 - x + x^2) + x^2\varepsilon(x)$$

$$= -2 + 2x - \frac{5}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x). \quad \textbf{(1Pt)}$$

La droite d'équation $y = -2 + 2x$ est la tangente T de la courbe de f en 0. **(0.5 Pt)**
De plus,

$$f(x) - (-2 + 2x) = -\frac{5}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

Ainsi, $f(x) - y \leq 0$ **(0.5 Pt)** au voisinage de 0 et par suite, la courbe de f est au dessous de la tangente T a voisinage de 0. **(0.5 Pt)**