

LMD - MI - Statistique - Examen Final - Juin 2021.

Exercice 1 (10 pts)

Partie A (4 pts) [1) : (0.5 Pt + 0.5 Pt) ; 2) (0.5 Pt + 1 Pt+ 0.5 Pt + 1 Pt)]

L'assistant de T.D du module de statistique a relevé le nombre Y d'absents par séance pendant une période de 15 séances. Les valeurs de Y sont données par la série statistique suivante : **4, 0, 4, 1, 2, 5, 4, 2, 3, 4, 3, 4, 4, 2, 3.**

- 1) Déterminer la population Ω et l'individu ω .
- 2) Calculer à partir de la série statistique : le mode M_o , la médiane M_e , la moyenne \bar{y} et l'écart type σ_y .

Partie B (6 Pts) :

On dispose d'un lot Ω de 500 pièces mécaniques. On note X le Caractère discret définie sur Ω , désignant le nombre de défauts par pièce ω . Les valeurs prises par X avec leurs effectifs respectifs sont données par le tableau suivant :

$X = x_i$	0	1	2	3	4
Effectifs n_i	112	170	<u>128</u>	60	30

- 1) Que représente le chiffre 128 ? (0.5 Pt).
- 2) Compléter le tableau : (2 Pts)

$X = x_i$	n_i	f_i	N_i	F_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$

- 3) Calculer : i) le mode M_o , ii) la moyenne \bar{x} , iii) l'écart type σ_x . (0.5 Pt + 0.5 Pt + 0.5 Pt)
- 4) Déterminer la fonction de répartition de X et tracer sa courbe (cumulative des fréquences). (1 Pt + 1 Pt).

Exercice 2 (10 pts) :

Le caractère continu Z représente la durée d'une communication téléphonique (mn). Le tableau suivant donne les valeurs de Z réparties par classes avec leurs fréquences cumulées respectives :

Classe C_i	[0 ; 10[[10 ; 20[[20 ; 30[[30 ; 40[[40 ; 50[
F_i	0,21	α	<u>0,86</u>	0,96	1,00

- 1) Calculer la valeur de α pour que la fréquence partielle de la classe [10 ; 20[soit égale à 0.30 (0.5 Pt)
- 2) Interpréter le chiffre 0,86 (0.5 Pt)
- 3) Tracer l'Histogramme des fréquences partielles f_i . (0.5 Pts)
- 4) Calculer : i) Le mode M_o ; ii) Calculer la médiane M_e et donner son interprétation (2 Pts) + (1.5 Pts + 0.5 Pt)
- 5) Donner l'expression de la fonction de répartition dans la Classe $C_3 = [20 ; 30[$. En déduire Q_3 (2.5 Pts)
- 6) Si on suppose que l'étude statistique porte sur 120 communications. Calculer la valeur β pour que 45 communications aient une durée dans l'intervalle $[\beta ; Q_3]$. (2 Pts)

NB : La Note du Contrôle Continu se calcule comme suit : $C.C = 2 \text{Max}(\text{Note exercice 1} ; \text{Note exercice 2})$.

Exercice 1 :

PARTIE A (4 points)

- 1) Ω = ensemble de 15 pièces (0,15 pt) ; w = une pièce (0,15 pt)
 2) On remarque que la modalité 4 se répète le plus de fois (6 fois).
 D'où $Mo = 4$ (0,15 pt)

b) Pour calculer la médiane Me : on classe d'abord la série statistique par ordre croissant : 0 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 5.
 Ensuite on calcule le rang de Me : $rg(Me) = \frac{n+1}{2} = \frac{15+1}{2} = 8$ (0,15 pt)
 Enfin $Me = 8^e$ valeur de la série statistique classée $\Rightarrow Me = 3$ (0,15 pt)

c) la moyenne $\bar{x} = \frac{1}{15}(0+1+\dots+5) = \frac{45}{15} \Rightarrow \bar{x} = 3$ (0,15 pt)

d) l'écart type : $\sigma_x = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{\frac{1}{15}(0^2+1^2+\dots+5^2) - (3)^2}$ (0,15 pt)
 $\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{1,73} \Rightarrow \sigma_x = 1,31$ (0,15 pt)

PARTIE B (6 pts)

1) 128 = le nombre de pièces ayant 2 défauts (0,15 pt)

2) Tableau (2 pts)

i) 3) D'après le tableau

$Mo = 1$ (0,15 pt)

(la modalité qui a le plus grand n_i)

ii) $\sum f_i x_i = 1,452$
 (0,15 pt)

iii) $\sigma_x = \sqrt{Var(x)}$

$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2} = \sqrt{3,404 - 2,108} \Rightarrow \sigma_x = 1,138$

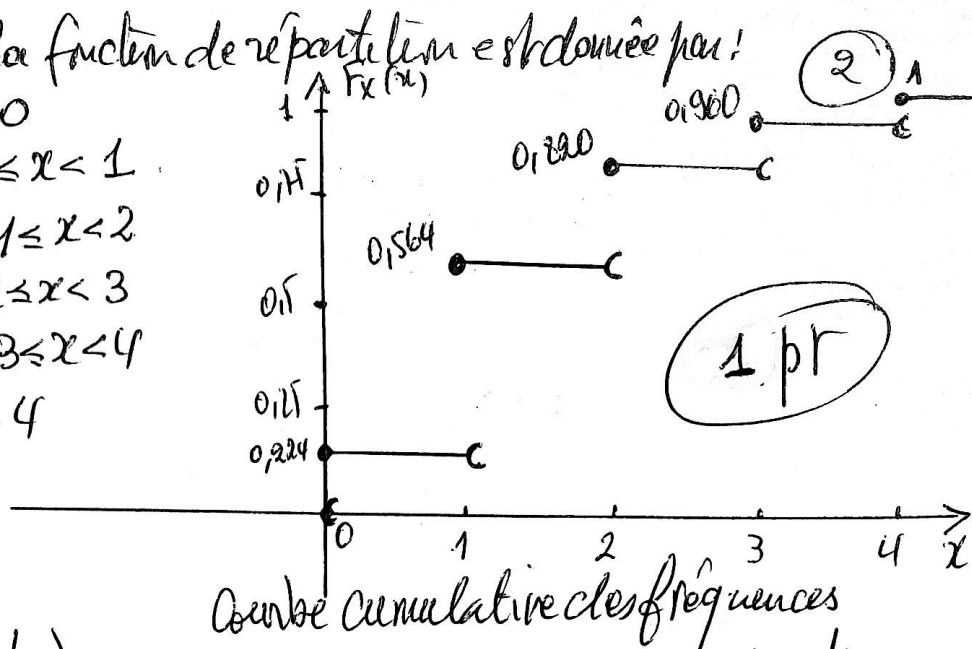
(0,15 pt)

$X=x_i$	n_i	f_i	N_i	F_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	112	0,224	112	0,224	0	0
1	170	0,340	282	0,564	0,340	0,340
2	128	0,256	410	0,820	0,512	1,024
3	60	0,12	470	0,940	0,360	1,08
4	30	0,06	500	1,00	0,24	0,96

1) D'après le cours; F_X , la fonction de répartition est donnée par:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F_1 = 0,224 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ F_2 = 0,564 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ F_3 = 0,820 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ F_4 = 0,960 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

2 pr



1 pr

Exercice 2 (10 points)

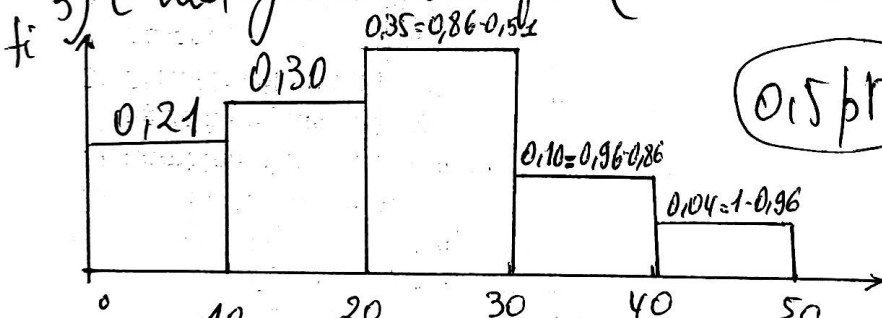
1) on note $f_1 (= 0,21)$ la fréquence partielle de la classe $[0; 10[$ et $f_2 (= 0,30)$ celle de $[10; 20[$. D'après le cours: $\alpha = f_1 + f_2 = 0,51$.

0,5 pr

2) $0,86 = 86\%$ des communicatins ont une durée $< \tilde{a} 30$ mm (on s'en $\leq \tilde{a} 30$ mm) (car Z est continue).

0,5 pr

3) L'histogramme des f_i (on sait que $f_i = F_i - F_{i-1}$)



0,5 pr

4) D'après l'histogramme $\Pi_0 \in [20; 30[$ et d'après le cours $\Pi_0 = a_{i-1} + h \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$ où $a_{i-1} = 20$; $h = 10$;

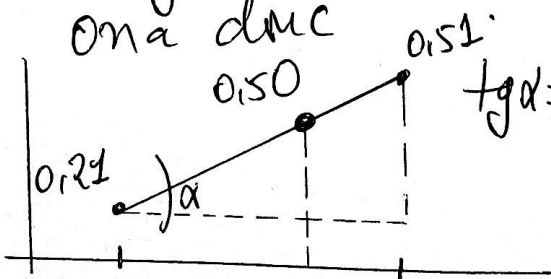
0,5 pr

$\Delta_1 = 0,35 - 0,30$ et $\Delta_2 = 0,35 - 0,10$. D'où $\Pi_0 = 24,67$

0,5 pr

5) Par hypothèse $\Pi_e \in [10; 20[$

on a donc



$$\tan \alpha = \frac{0,51 - 0,21}{20 - 10} = \frac{0,50 - 0,21}{\Pi_e - 10}$$

0,5 pr

$$\Rightarrow \Pi_e = 19,67$$

0,5 pr

interprétation: Il y a 50% de communications dont la durée est

< à 19,67 mn (ou bien \leq à 19,67 mn) (0,15 pt)

5- si $x \in [a_{i-1}; a_i[$: $F_x(x) = F_{i-1} + \frac{f_i}{h} (x - a_{i-1})$ (0,15 pt)

F_{i-1} est la fréquence cumulée de la classe $[a_{i-2}; a_{i-1}[$ et f_i est la fréquence partielle de la classe $[a_{i-1}; a_i[$ et $h =$ la longueur d'une classe. D'où $x \in [20; 30[$: $F_x(x) = 0,51 + \frac{0,135}{10} (x - 20)$

$$\Rightarrow F_x(x) = 0,035x - 0,19 \quad (x \in [20; 30[)$$

or $F_x(20) = 0,51$ et $F_x(30) = 0,86$, a ms $Q_3 \in [20; 30[$ (0,15 pt)

et comme $F_x(Q_3) = 0,75 \Rightarrow Q_3 = \frac{0,75 + 0,19}{0,035} \Rightarrow Q_3 = 26,857$ (0,15 pt)

6- On sait (toujours) d'après le cours que:

$F_x(Q_3) - F_x(\beta) =$ pourcentage (%) des communications dont la durée est dans l'intervalle $[\beta; Q_3]$. (0,15 pt)

or $F_x(Q_3) - F_x(\beta) = \frac{45}{120} = 0,375$; comme $F_x(Q_3) = 0,75$

Alors $F_x(\beta) = 0,75 - 0,375 \Rightarrow F_x(\beta) = 0,375$ (0,15 pt)

et d'après le tableau (des données): $\beta \in [10; 20[$

or $F_x(\beta) = 0,21 + \frac{0,30}{10} (\beta - 10) \Rightarrow \beta = 10 + \frac{10(0,375 - 0,21)}{0,30}$

(0,15 pt)

$\Rightarrow \beta = 15,5$ (0,15 pt)