Chapitre 6: Travail et énergie

1. Le travail :

Tout mouvement accéléré sous l'action des forces $\vec{F}$, implique un travail de ces forces. Ce travail appliqué au point matériel P donne un déplacement de ce point , à l'instant t, le point Pest en M de vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ et à l'instant $t+dt$, le point P est en M' de position $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{dr} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$,

L'expression du travail de la force $\vec{F}$pour un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dr}$:

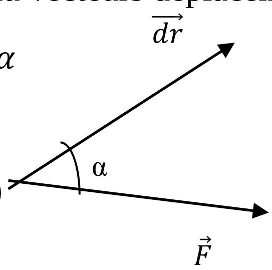
$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

Le travail est un produit scalaire du vecteur force et du vecteurs déplacement.

$$dW = |\vec{F}|.|\overrightarrow{dr}|.cos\alpha$$

θ est l'angle entre les deux vecteurs

$$\vec{F}\ et\ \overrightarrow{dr}\alpha = (\vec{F}, \overrightarrow{dr})$$



Pour α=0 $\quad dW = |\vec{F}|.|\overrightarrow{dr}|$ $\quad$ car $cos\alpha = 1$

Pour $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\quad dW > 0$ C'est un travail moteur

Pour α=$\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad dW = 0$ $\quad$ car $cos\alpha = 0$

Pour $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\quad dW < 0$ C'est un travail résistant

L'unité du travail est le « joule »

2. La puissance :

La puissance d'une force $\vec{F}$ est le travail par unité de temps

La puissance moyenne $P_{moy} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

La puissance instantanée $P = \frac{dW}{dt}$

L'unité de la puissance est le « Watt »

3. Energie

3.1 Energie cinétique

Nous avons dW=$F_T dr$. Partant de cette expression on peut déduire ce qui suit :

$dW = F_T\, dr = m\frac{dv}{dt}\, dr$; avec$F_T = ma = m\frac{dv}{dt}$

$\Rightarrow dW = m\,\frac{dr}{dt}\,dv \quad alors \quad dW = mvdv$

Intégrons l'expression du travail élémentaire, et tirons la définition de l'énergie cinétique :

$$W = m\int_A^B vdv \quad \Rightarrow W = \frac{1}{2}\,m(v_B^2 - v_A^2)$$

Où $v_A$est la vitesse du mobile au point A et v_B sa vitesse au point B .

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m, de vitesse instantanée $\vec{v}$ est donnée par l'expression

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2$$

Et puisque $p=mv$, on peut écrire aussi :

$$Ec = \frac{P^2}{2m}$$

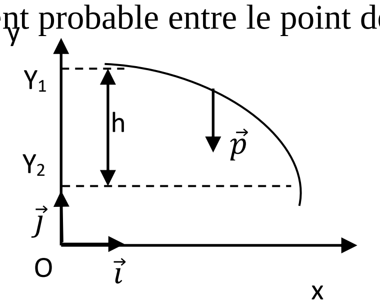
3.2 Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail de la résultante de toutes les forces qui lui sont appliquées entre ces deux instants

$$W=\Delta E_C \Rightarrow \sum_i W_i = \Delta E_C$$

3.3 Forces conservatives

On dit d'une force qu'elle est conservative, ou dérivant d'un potentiel, si son travail est indépendant du chemin suivi, quelque soit le déplacement probable entre le point de départ et le point d'arrivée.



Exemple : Calculons le travail de la force de pesanteur

$dW = \vec{p}.\vec{dl} \quad$ avec $\quad p = -mg\,\vec{j}$

$\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} \quad$ donc $\quad dW = -mgdy$

$$W = -mg\int_{y_1}^{y_2} dy = -mg(y_2 - y_1)$$

$$\Rightarrow W = mg(y_1 - y_2) = mgh$$

Donc la force de pesanteur $\vec{p}$ est une force conservative car son travail ne dépend pas du chemin suivi et on dit qu'elle dérive d'un potentiel

La force de rappel du ressort est aussi une force conservative

Une force est dite **non conservative** si son travail dépend du chemin suivi comme *la force de frottement.*

3.4 Energie potentielle

L'énergie potentielle est une fonction de coordonnées, telle que l'intégration entre ses deux valeurs prises au départ et à l'arrivée.

_ Si la force $\vec{F}$est une force dérivant d'un potentiel, alors :

$$W = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dr} = E_{P_A} \_ E_{P_B} \quad \Rightarrow dW = -dE_p$$

L'énergie potentielle est toujours rapportée à un référentiel pris comme origine pour la calculer (Ep=0). La fonction de l'énergie potentielle Ep est déterminée à une constante près.

Par identification des deux expressions dEp et dW, on arrive au résultat : La différentielle de l'énergie potentielle est égale et de sens opposé à la différentielle du travail

$dW=-dEp(z) \Rightarrow dEp(z) = -dW$

Exemple :

Poids

En considérant cette force conservative

$$dW = -mgdy = -dmgy$$

$dW=-dEp=-dmgy \Rightarrow dEp = dmgy$

$$\Rightarrow \int dEp = \int dmgy$$

$$\Rightarrow Ep = mgy + c$$

Force de rappel du ressort

$\vec{F} = -kx\vec{\imath}$ et $dW = \vec{F}.\overrightarrow{dx}$

$dW = -dE_p = -kxdx \Rightarrow dE_p = kxdx$

$$\Rightarrow \int dEp = k \int xdx$$

$$\Rightarrow Ep = \frac{1}{2}kx^2 + c$$

4 L'énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un point matériel à un instant donné est égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$E_M = E_C + Ep \Rightarrow E_M = E_C + Ep$

4-1 Principe de la conservation de l'énergie mécanique

Dans le champ de ***force conservatrice*** (ou dérivant d'un potentiel) l'énergie mécanique se conserve au cours du temps.

$E_M = E_C + Ep = Cte$

Cela veut dire que la variation de l'énergie mécanique est nulle $\Delta EM = 0$, cela veut dire aussi que la variation de l'énergie cinétique est égale à la variation de l'énergie potentielle :

$\Delta Ec = -\Delta Ep$. En d'autres termes, si le système est isolé mécaniquement l'énergie mécanique est conservée.

Dans le cas de la présence de frottements, la variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces de frottement *Wfrott*:

$\Delta E_M = \sum Wfrott$

TD n° 5 de Mécanique
Travail et Energie

EXERCICE 1

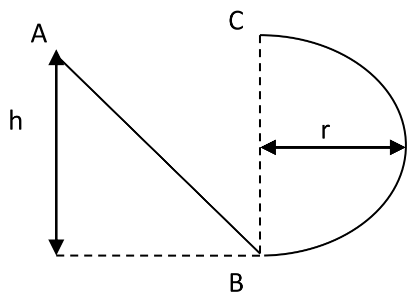
Un corps solide S de masse m est lié d'un coté à un ressort de raideur K, l'autre coté du ressort est fixe. On déplace le corps horizontalement de sa position d'équilibre d'une distance x et on le lâche (μ =tg φ : coefficient de frottement).

1- Représenter les forces appliquées sur le corps S
2- Calculer la vitesse V_B correspondant au passage de S de sa position d'équilibre

EXERCICE 2

Une bille glisse sans frottement à l'intérieur d'une gouttière

Trouver la plus petite hauteur h_{min} à partir de laquelle la bille est lancée pour atteindre le point C, sans quitter la gouttière

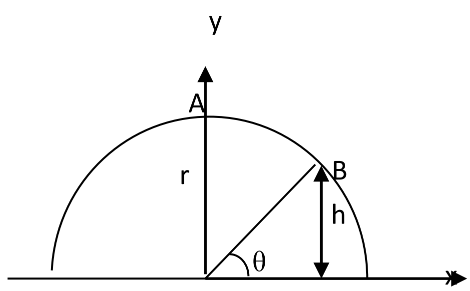


EXERCICE 3

Un morceau de glace M de masse m glisse sans frottement sur la surface externe d'un igloo qui est une demi sphère de rayon r dont la base est horizontale.

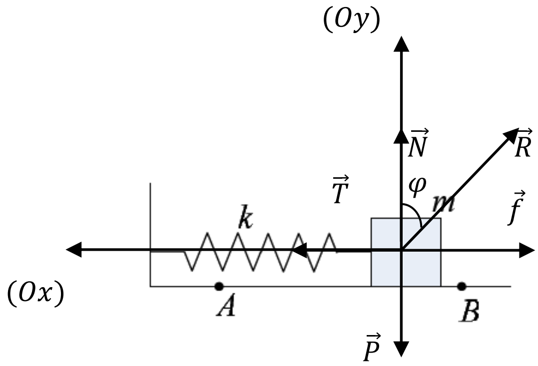
A t=0, il est lâché du point A sans vitesse initiale

1- Trouver l'expression de la vitesse au point B, en fonction de g, r et θ
2- En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'expression de $|\vec{N}|$ la réaction de l'igloo sur M au point B en fonction de la vitesse v_B
3- A quelle hauteur, M quitte t-il la sphère ?
4- A quelle vitesse M arrive à l'axe (Ox)?



CORRIGES DES EXERCICES

EXERCICE 1



$\Delta Ec = \Sigma W_{f_{ext}} \Rightarrow Ec_B - Ec_A = W_p + W_T + W_N + W_f$

Donc $Ec_B = W_T + W_f$ (*) $Ec_A = 0$ *car la vitesse initiale est nulle*

Avec $W_T = \frac{1}{2}kx^2$ et $W_f = -f\ x$

D'après le principe fondamental de la dynamique

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{N} + \vec{p} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$

$\mu = tg\varphi = \dfrac{f}{N}$

On choisit un repère composés de l'axe (Ox) suivant l'axe de mouvement donc dans la même direction de $\vec{T}$ et l'axe (Oy) est suivant $\vec{N}$

En faisant la projection sur l'axe Oy

N-p=0⇒ $N = mg\ et\ \mu = tg\varphi = \frac{f}{mg}$

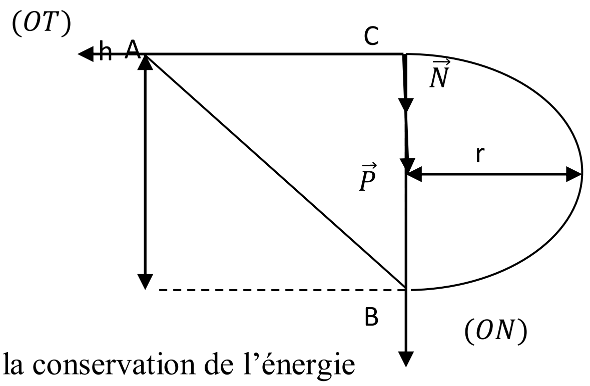
Alors f=mg tg φ

Donc (*)⇒ $\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}kx^2 - \text{mg (tg φ)}$

Alors

$$v_B^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}kx^2 - \text{mg x tg φ}\right)$$

EXERCICE 2



D'après le principe de la conservation de l'énergie mécanique :

- entre les deux points A et B

$E_{M_A} = E_{M_B} \Rightarrow E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B}$

Alors $E_{P_A} = E_{C_B}$(*)

car$E_{C_A} = 0$ *puisque* $v_A = O$ *car la bille est lancée sans vitesse initiale et*

$E_{P_B} = 0$ *puisque* $E_{P_B} = mgh$ *et* $h = 0$

Donc (*)$\Rightarrow$ $mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$

- entre les deux points B et C

$E_{M_B} = E_{M_C} \Rightarrow E_{C_B} + E_{P_B} = E_{C_C} + E_{P_C}$

Alors $E_{C_B} = E_{C_C} + E_{P_C}$

Donc $mgh = \frac{1}{2}mv_C^2 + 2mgr$ (*')

La bille quitte la gouttière au point C quand N=0,

D'après le principe fondamental de la dynamique

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{N} + \vec{p} = m\vec{a}$

On choisit un repère composés de l'axe (OT) tangent à la demi sphère et l'axe (ON) suivant le rayon et dans le sens de $\vec{N} et \ \vec{p}$

En faisant la projection sur l'axe ON

N+p=ma$_N$$\Rightarrow$ $N + mg = m\frac{v^2}{r}$

Au point C pour N=0 la vitesse sera

$mg = m\frac{v_C^2}{r} \Rightarrow v_C^2 = r\,g$

(*')⇒ $mgh_C = \frac{1}{2}mgr + 2mgr = \frac{5}{2}mgr$

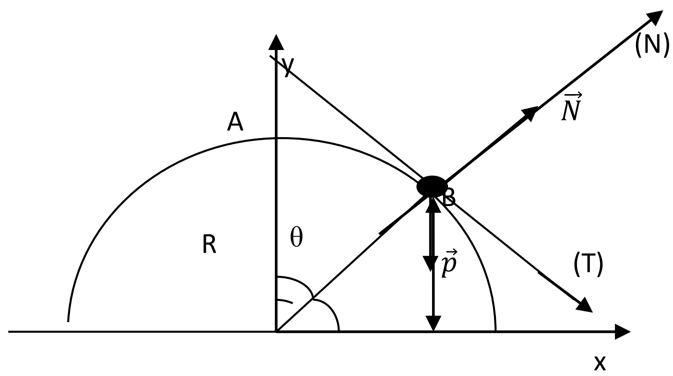
Alors $h_C = \frac{5}{2}r$

$h_C$est la valeur minimale pour laquelle la bille atteint le point C sans quitter la gouttière

Pour h<h_C la bille n'atteint pas le point C

Pour h>h_C la bille atteint le point C et quitte la gouttière

EXERCICE 3



1-D'après le principe de la conservation de l'énergiemécanique :

- entre les deux points A et B

$E_{M_A} = E_{M_B} \Rightarrow E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B}$

Alors $E_{C_A} = E_{C_B} + E_{P_B}$

car$E_{C_A} = 0\ puisque\ v_A = O\ \ car\ le\ point\ matériel\ est\ lancée\ sans\ vitesse\ initiale$

avec$h_B = Rcos\theta$

Donc (*)⇒ $mgR = \frac{1}{2}mv_B^2$+ mg Rcos θ

Alors $gR = \frac{1}{2}v_B^2$+ g Rcosθ (*')⇒ v_B^2= $2(gR - gRcos\theta)$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2(gR - gRcos\theta)}$$

2-D'après le principe fondamental de la dynamique

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{N} + \vec{p} = m\vec{a}$$

On choisit un repère composés de l'axe (OT) tangent à la demi sphère et l'axe (ON) suivant le rayon et dans le sens de $\vec{N}$

En faisant la projection sur l'axe ON

N-p cosθ =ma$_N$$\Rightarrow N - mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{r}$

3-Quand le point P quitte la sphère alors N=0

$mg\cos\theta = m\frac{v_p^2}{R} \Rightarrow v_p^2 = Rg\cos\theta$

(*')$\Rightarrow$ $R = \frac{1}{2}R\, g\cos\theta$+ g Rcos θ alors $cos\theta = \frac{2}{3}$

Donc $\theta_0 = 48°$

Le point matériel P quitte la sphère à une hauteur $h_p=\frac{2}{3}R$

L'angle par rapport à l'horizontale pour lequel le point quitte la demi sphère est 90-48=52

4-La vitesse du point matériel en ce point

$v_p^2 = Rg\cos\theta \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2}{3}Rg}$

(Les résultats trouvés sont les mêmes que ceux trouvés en utilisant le principe fondamentale de la dynamique)