Chapitre IV : Mouvement relatif

1. Introduction :

L'état de mouvement ou de repos sont deux notions essentiellement relatives; cela veut dire que chacun des deux états dépend de la position du mobile vis-à-vis du corps pris comme référentiel. Tous les mouvements que nous avons étudiés jusqu'à présent, étaient dans un repère galiléen, c'est-à-dire au repos ou en mouvement rectiligne uniforme. Lorsque deux observateurs liés à deux repères différents qui sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, la position, la trajectoire, la vitesse et l'accélération du même mobile varient selon le repère choisi par l'observateur.

Exemple : Soit un point matériel collé sur la jante d'une roue de bicyclette :

_ Par rapport à un repère terrestre : le mouvement n'est pas uniforme et la trajectoire est une suite de courbes appelées cycloïdes.

_ Par rapport à un repère lié à l'axe de la roue : le mouvement est uniforme et la trajectoire est circulaire.

Il est très intéressant de connaître comment sont reliées les observations enregistrées par deux observateurs liés à deux repères différents, l'un en mouvement par rapport à l'autre.

2 Vitesse relative du mobile :

Soit un référentiel (R_0) repère fixe et (R) repère mobile par rapport à (R_0),

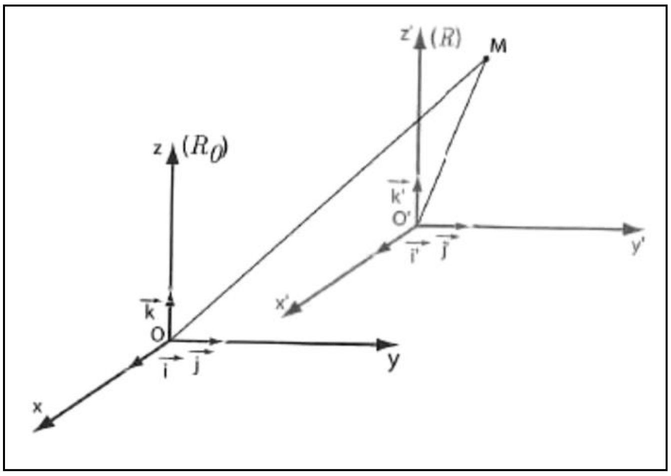


Figure1 Le mobile M représenté par rapport au repère fixe (R_0) et au repère mobile

Associons au référentiel (R_0) le repère R_0 ($O,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) et au référentiel Rle repère R ($O',\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}$).

Si M est un point mobile dans l'espace, on appellera

Mouvement relatif : le mouvement de M par rapport à (R)

Mouvement absolue : Le mouvement de M par rapport à (R_0)

Mouvement d'entrainement : le mouvement du repère mobile (R) par rapport au repère fixe (R_0).

2.1 Composition de la vitesse

On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + \left(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}\right)$, avec (x',y',z') sont les coordonnées du point M dans le repère mobile

$\overrightarrow{OM} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$, avec (x,y,z) sont les coordonnées du point M dans le repère fixe

La vitesse s'écrit alors

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$= \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}$$

Avec :

$$\begin{cases} \vec{v_a} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k} = \overrightarrow{v(M)}/(R_O) \\ \vec{v_r} = \dfrac{dx'}{dt}\vec{i'} + \dfrac{dy'}{dt}\vec{j'} + \dfrac{dz'}{dt}\vec{k'} = \dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/\,(R) = \overrightarrow{v(M)}/(R) \\ \vec{v_e} = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\dfrac{d\vec{i'}}{dt} + y'\dfrac{d\vec{j'}}{dt} + z'\dfrac{d\vec{k'}}{dt} = \overrightarrow{v(R_O)}/(R) \end{cases}$$

$$\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e}$$

$\vec{v_a}$représente la vitesse absolue, c'est la dérivée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps dans le repère fixe

$\vec{v_r}$est la vitesse relative, c'est la dérivée de $\overrightarrow{O'M}$ par rapport au temps dans le repère mobile

$\overrightarrow{v_e}$correspond à la vitesse d'entrainement, c'est la dérivée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps dans le repère fixe, en considérant le point mobile M fixe dans le repère mobile (x', y' et z' sont constantes)

Elle représente aussi la vitesse du repère mobile par rapport au repère fixe

Lorsque le mouvement d'entrainement est un mouvement de translation, les vecteurs $\vec{\imath'}, \vec{\jmath'} et\ \overrightarrow{k'}$ restent parallèles aux vecteurs unitaires ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}$et $\vec{k}$) du repère fixe.

$$\frac{d\vec{\imath'}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} = \vec{0}$$

La vitesse d'entrainement peut s'écrire aussi

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$$

Avec $\vec{\omega}$ représente la vitesse de rotation du repère mobile (R)par rapport au repère fixe(R_0)

Dans le cas d'un mouvement de translation $\vec{\omega} = \vec{0}$

3 Composition de l'accélération :

Nous avons l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \boldsymbol{\frac{dx'}{dt}\vec{\imath'}} + \boldsymbol{\frac{dy'}{dt}\vec{\jmath'}} + \boldsymbol{\frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'}} + x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\vec{\imath'}\right) = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath'} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{\imath'}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy'}{dt}\vec{\jmath'}\right) = \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath'} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'}\right) = \frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{k'} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right) = \frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{\imath'}}{dt} + x'\frac{d^2\vec{\imath'}}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right) = \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + y'\frac{d^2\vec{\jmath'}}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)=\frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}+z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}$$

$$\vec{a}=\frac{d^2x'}{dt^2}\overrightarrow{\imath'}+\frac{d^2y'}{dt^2}\overrightarrow{\jmath'}+\frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{k'}+\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+x'\frac{d^2\overrightarrow{\imath'}}{dt^2}+y'\frac{d^2\overrightarrow{\jmath'}}{dt^2}+z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}+2(\frac{dx'}{dt}\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt})$$

Avec

$$\overrightarrow{a_a}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{a_r}=\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}=\frac{d^2x'}{dt^2}\overrightarrow{\imath'}+\frac{d^2y'}{dt^2}\overrightarrow{\jmath'}+\frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{k'}$$

$$\overrightarrow{a_e}=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+x'\frac{d^2\overrightarrow{\imath'}}{dt^2}+y'\frac{d^2\overrightarrow{\jmath'}}{dt^2}+z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{a_e}=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+\vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right)+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M}$$

$$\overrightarrow{a_c}=\ 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{a_c}=2\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{v_r}$$

Et $\overrightarrow{a_a}=\overrightarrow{a_r}+\overrightarrow{a_c}+\overrightarrow{a_e}$

$\overrightarrow{a_a}$ est l'accélération absolue qui représente la deuxiéme dérivée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps dans le repère fixe

$\overrightarrow{a_r}$ est l'accélération relative qui représente la deuxiéme dérivée de $\overrightarrow{O'M}$ par rapport au temps dans le repère mobile

$\overrightarrow{a_e}$ est l'accélération d'entrainement qui représente l'accélération du mouvement du repère mobile par rapport au repère fixe

$\overrightarrow{a_c}$ est l'accélération de Coriolis ou l'accélération complémentaire

TD n° 4 de Mécanique

Mouvement relatif

Exercice 1

Les coordonnées d'une particule mobile dans le référentiel (R) muni du repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ sont données en fonction du temps par :

$$x = 2t^3 + 1, \qquad y = 4t^2 + t - 1, \qquad z = t^2$$

Dans un deuxième référentiel (R') muni du repère $(O',\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$ avec $\vec{\imath} = \vec{\imath'}, \vec{\jmath} = \vec{\jmath'}, \vec{k} = \vec{k'}$sont données par :

$$x' = 2t^3, \qquad y' = 4t^2 - 3t + 2, \qquad z' = t^2 - 5$$

1-Exprimez la vitesse v de M dans (R) en fonction de sa vitesse v' dans (R'), procéder de même pour les accélérations

2-Définir le mouvement d'entrainement de (R') par rapport à (R).

Exercice 2

Un point M se déplace avec une vitesse V_0 constante sur l'axe (OX) d'un repère (OXYZ) qui tourne avec une vitesse angulaire ω constante autour de (Oz) dans le plan (Oxy)

1- Quelle est l'expression de $\overrightarrow{OM}$ dans le repère fixe. Calculer la vitesse absolue et l'accélération absolue
2- Calculer la vitesse relative et la vitesse d'entrainement, vérifier que $\vec{v_a}=\vec{v_r}+\vec{v_e}$.
3- Calculer l'accélération relative $\vec{a_r}$, l'accélération d'entrainement $\vec{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\vec{a_c}$, vérifier que $\vec{a_a}=\vec{a_r}+\vec{a_e}+\vec{a_c}$.

Exercice 3

Dans le plan Oxy, on considère un système d'axes mobiles (OXY) de même origine O et tel que Ox fasse avec OX un angle variable θ. Un point M mobile sue l'axe OX est repéré par OM=r. On appelle mouvement relatif de M son mouvement par rapport à (OXY), et le mouvement absolu par rapport à (Oxy).

Calculer dans le repère mobile (coordonnées polaires)

1- La vitesse et l'accélération relative de M
2- La vitesse et l'accélération d'entrainement de M
3- Accélération de Coriolis
4- En déduire sa vitesse et son accélération absolue

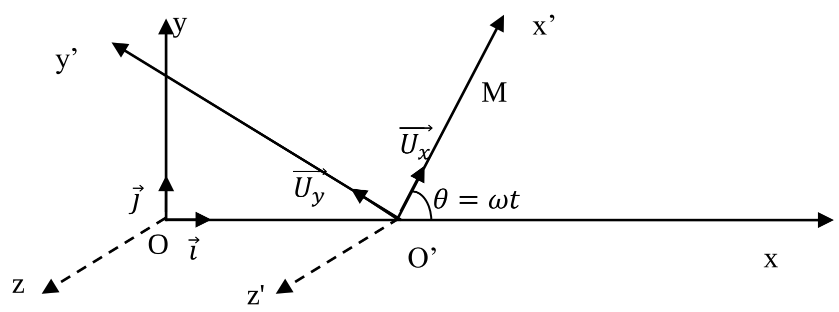
Exercice 4

Soit le repère R(Oxyz) et le point O' se déplace sur l'axe (Ox) avec une vitesse constante v. On lie à O' le repère (O'x'y'z') qui tourne autour de (constante Oz) avec une vitesse angulaire ω constante. Un point mobile M se déplace sur l'axe O'x' tel que $\left|\overrightarrow{O'M}\right| = t^2$.

A l'instant t=0, les axes (Ox) et (O'x') sont confondus et M est en O.

1-Calculer la vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$ et la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$, en déduire la vitesse absolue $\overrightarrow{v_a}$.

2-Calculer l'accélération relative $\overrightarrow{a_r}$, l'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$, en déduire l'accélération absolue $\overrightarrow{a_a}$.



Exercice 5

Dans le plan (Oxy) d'un repère (Oxyz), un point O' auquel on lie le repère (O'XYZ), décrit un cercle de centre O et de rayon r, il tourne avec une vitesse angulaire ω constante. Un point M se déplace sur l'axe (O'Y) parallèle à Oy avec une accélération γ constante. (à l'instant t=0, M est confondu avec M_0(r,0,0)et sa vitesse initiale est positive).

1- Calculer dans le repère (Oxyz) le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, la vitesse absolue $\overrightarrow{v_a}$ et l'accélération absolue $\overrightarrow{a_a}$
2- Sachant que O'X//Ox, O'Y//Oy et O'Z//Oz, calculer
   a- La vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$ et la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$, vérifier que $\overrightarrow{v_a}=\overrightarrow{v_r}+\overrightarrow{v_e}$.
   b- L'accélération relative $\overrightarrow{a_r}$, l'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$, vérifier que $\overrightarrow{a_a}=\overrightarrow{a_r}+\overrightarrow{a_e}+\overrightarrow{a_c}$.

Exercice supplémentaire

Soit le repère R(Oxyz) et le point O' se déplace sur l'axe (Oy) avec une accélération constante γ. On lie à O' le repère (O'XYZ) qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire ω constante. Les coordonnées d'un mobile M dans le repère mobile sont $x'=t^2$ et $y'=t$.

A l'instant t=0, l'axe (O'X) est confondu avec (Ox).

Calculer dans le repère mobile :

1-La vitesse $\overrightarrow{v_r}$ et la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$, en déduire la vitesse absolue $\overrightarrow{v_a}$.

2-L'accélération relative $\overrightarrow{a_r}$, l'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$, en déduire l'accélération absolue $\overrightarrow{a_a}$.

CORRIGES DES EXERCICES

Exercice 1

$$\overrightarrow{OM}/(R)\begin{cases} x = 2t^3 + 1 \\ y = 4t^2 + t - 1 \\ z = t^2 \end{cases} \quad et \quad \overrightarrow{O'M}(R')\begin{cases} x' = 2t^3 \\ y' = 4t^2 - 3t + 2 \\ z' = t^2 - 5 \end{cases}$$

La vitesse du point M dans le référentiel fixe (R) et le référentiel mobile (R')

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6t^2 \\ \frac{dy}{dt} = 8t + 1 \\ \frac{dz}{dt} = 2t \end{cases} \text{ et} \overrightarrow{v'} = \overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = 6t^2 \\ \frac{dy}{dt} = 8t - 3 \\ \frac{dz}{dt} = 2t \end{cases}$$

$\vec{v}$=$6t^2\vec{\imath}$ +$(8t + 1)\vec{\jmath} + 2t\vec{k}$ et $\overrightarrow{v'} = 6t^2\vec{\imath}$ +$(8t - 3)\vec{\jmath} + 2t\vec{k}$

$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} \Rightarrow \overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_a} - \overrightarrow{v_r}$

$\overrightarrow{v_e}$=$(6t^2\vec{\imath}$ +$(8t + 1)\vec{\jmath} + 2t\vec{k}) - (6t^2\vec{\imath}$ +$(8t - 3)\vec{\jmath} + 2t\vec{k})$=$4\vec{\jmath}$ donc $\vec{v}$=$\vec{v}' + 4\vec{\jmath}$

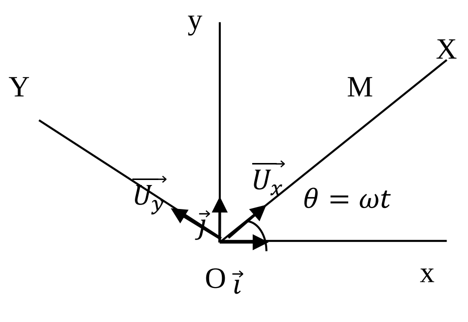
L'accélération du point M dans les deux référentiels fixe (R) et mobile (R')

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 12t \\ \frac{dv_x}{dt} = 8 \\ \frac{dv_z}{dt} = 2 \end{cases} \text{ et} \overrightarrow{a'} = \overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v'}}{dt}\begin{cases} \frac{dv'_x}{dt} = 12t \\ \frac{dv'_x}{dt} = 8 \\ \frac{dv'_z}{dt} = 2 \end{cases}$$

Donc $\vec{a} = \overrightarrow{a'}$

Le mouvement du référentiel (R') par rapport au référentiel fixe (R) est un mouvement uniforme de translation suivant l'axe Oy avec une vitesse constante de 4m/s

Exercice 2



$\overrightarrow{OM} = v_0 t\overrightarrow{U_x}$Dans le repère (OXY)

avec $\overrightarrow{\mathrm{U_x}} = \cos\omega t\,\vec{\imath} + \sin\omega t\,\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{\mathrm{U_y}} = -\sin\omega t\,\vec{\imath} + \cos\omega t\,\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{OM}/(R) = v_0 t\,(\cos\omega t\,\vec{\imath} + \sin\omega t\,\vec{\jmath})$Dans le repère (Oxy)

La vitesse absolue :

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/(R) = v_0\cos\omega t\,\vec{\imath} + v_0\sin\omega t\,\vec{\jmath} - v_0\omega t\sin\omega t\,\vec{\imath} + v_0\omega t\cos\omega t\,\vec{\jmath}$$

$=v_0\,(\cos\omega t\,\vec{\imath} + v_0\sin\omega t\,\vec{\jmath}) + v_0\omega t\,(-\sin\omega t\,\vec{\imath} + \cos\omega t\,\overrightarrow{\jmath)}$

$=v_0\overrightarrow{\mathrm{U_x}} + v_0\omega t\overrightarrow{\mathrm{U_y}}$

(**OU**$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/(R) = \frac{d(v_0 t\overrightarrow{U_x})}{dt} = v_0\overrightarrow{U_x}+v_0 t\frac{d\overrightarrow{U_x}}{dt}$,

$$avec\ \frac{d\overrightarrow{U_x}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{U_x}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\ \ et\theta = \omega t$$

$$\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{U_x}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{U_x}}{d\theta}\frac{d\omega t}{dt} = \omega\overrightarrow{U_y}\ car\ \frac{d\overrightarrow{U_x}}{d\theta} = \overrightarrow{U_y}$$

Alors : $\overrightarrow{v_a} = v_0\overrightarrow{\mathrm{U_x}} + v_0\omega t\overrightarrow{\mathrm{U_y}}$)

L'accélération absolue

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}/(R)$$
$$= -v_0\omega\sin\omega t\,\vec{\imath} + v_0\,\omega\cos\omega t\,\vec{\jmath} - v_0\omega\sin\omega t\,\vec{\imath} + v_0\,\omega\cos\omega t\,\vec{\jmath}$$
$$- v_0\omega^2 t\ \cos\omega t\,\vec{\imath} + v_0\omega^2 t\sin\omega t\,\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a_a} = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}/(R) = 2v_0\omega\,(-\sin\omega t\,\vec{\imath} + \cos\omega t\,\vec{\jmath}) - v_0\omega^2 t\,(\cos\omega t\,\vec{\imath} + \sin\omega t\,\vec{\jmath})$$

$\Rightarrow \overrightarrow{a_a} = 2v_0\omega\overrightarrow{U_y} - v_0\omega^2 t\overrightarrow{U_x}$

La vitesse relative

$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} / (OXY)$ avec$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} = v_0 t\, \overrightarrow{U_x}$ Donc $\overrightarrow{v_r} = v_0 \overrightarrow{U_x}$

La vitesse d'entrainement :

Le repère fixe et le repère mobile ont le même origine donc O' est confondu avec O, alors $\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$

$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + X\frac{d\overrightarrow{U_x}}{dt} = \vec{0} + v_0 t \frac{d\overrightarrow{U_x}}{dt}$avec$\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{U_x}}{dt} = \omega \overrightarrow{U_y}$

Donc $\overrightarrow{v_e} = \omega\, v_0 t\, \overrightarrow{U_y}$

<u>OU</u>

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$$

$\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$donc$\overrightarrow{v_e} = \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$

$\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_0 t & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega v_0 t\, \overrightarrow{U_y}$Donc $\overrightarrow{v_e} = \omega\, v_0 t\, \overrightarrow{U_y}$

Avec $\overrightarrow{\mathrm{U_x}} = \cos\omega t\,\vec{\imath} + \sin\omega t\,\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{\mathrm{U_y}} = -\sin\omega t\,\vec{\imath} + \cos\omega t\,\vec{\jmath}$

Alors $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = v_0(\cos\omega t\,\vec{\imath} + \sin\omega t\,\vec{\jmath}) + \omega\, v_0 t\ (-\sin\omega t\,\vec{\imath} + \cos\omega t\,\vec{\jmath})$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_a} = v_0 \overrightarrow{U_x} + \omega\, v_0 t\, \overrightarrow{U_y}$

Donc $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$ est vérifiée

L'accélération relative :

$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} / (OXY)$ avec$\overrightarrow{v_r} = v_0\, \overrightarrow{\mathrm{U_x}}$

Alors $\overrightarrow{a_r} = \vec{0}$

L'accélération d'entrainement

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + X\frac{d^2\overrightarrow{U_x}}{dt^2} = v_0 t\frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{U_x}}{dt}\right) \Rightarrow \overrightarrow{a_e} = v_0 t\frac{d}{dt}\left(\omega\ \overrightarrow{U_y}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a_e} = v_0 t\omega\left(\frac{d\overrightarrow{U_y}}{dt}\right)\text{avec}\frac{d\overrightarrow{U_y}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{U_y}}{d\theta}\frac{d\omega t}{dt} = -\omega\overrightarrow{U_x}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a_e} = v_0 t\omega\left(+\ \left(-\omega\overrightarrow{U_x}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a_e} = -v_0\omega^2\ t\ \overrightarrow{U_x}$$

<u>OU</u>

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M}$$

$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0}$car ω constante et $\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}$

Et $\vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) = \vec{\omega}\Lambda\left(\omega\ v_0 t\ \overrightarrow{U_y}\right) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega\ v_0 t & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 v_0 t\ \overrightarrow{U_x}$

Donc $\overrightarrow{a_e} = -\omega^2 v_0 t\overrightarrow{U_x}$

L'accélération de Coriolis

$$\overrightarrow{a_c} = 2\frac{dX}{dt}\frac{d\overrightarrow{U_x}}{dt}\ avec\ X = v_0 t\ \ et\frac{d\overrightarrow{U_x}}{dt} = \omega\overrightarrow{U_y}$$

Donc $\overrightarrow{a_c} = 2v_0\omega\overrightarrow{U_y}$

<u>OU</u>

$$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{v_r} = 2\begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\omega v_0\overrightarrow{U_y}$$

Donc $\overrightarrow{a_c} = 2\omega v_0\overrightarrow{U_y}$

L'accélération absolue

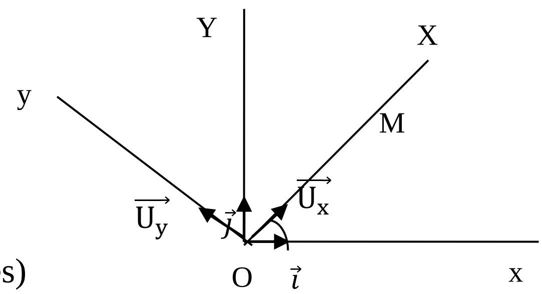
$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e} = -\omega^2 v_0 t\overrightarrow{U_x} + 2\omega v_0\overrightarrow{U_y}$

$\Rightarrow \overrightarrow{a_a} = -\omega^2 v_0 t(\cos \omega t\,\vec{i} + \sin \omega t\,\vec{j}) + 2\omega v_0(-\sin \omega t\,\vec{i} + \cos \omega t\,\vec{j})$

donc

$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e}$ est vérifiée

<u>Exercice 3</u>



$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{U_x}$dans le repère (OXY)

Dans le repère mobile (coordonnées polaires)

La vitesse relative :

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/(OXY) \; = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_x}\overrightarrow{v_r} = r^{\cdot}\overrightarrow{U_x}$$

L'accélération relative :

$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}/(OXY)$ avec $\overrightarrow{v_r} = r^{\cdot}\,\mathrm{U_x}$

Donc $\overrightarrow{a_r} = \frac{d^2r}{dt^2}\overrightarrow{\mathrm{U_x}} = r^{\cdot\cdot}\,\overrightarrow{\mathrm{U_x}}$

La vitesse d'entrainement :

$\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$car les deux repères ont le même origine

$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$

$\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$donc$\overrightarrow{v_e} = \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$

$$\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega r\, \overrightarrow{U_y} \text{Donc } \overrightarrow{v_e} = \omega\, r\, \overrightarrow{U_y}$$

L'accélération d'entrainement

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0} \text{car } \omega \text{ constante} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}$$

$$\vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) = \vec{\omega}\Lambda\left(\omega\, r\, \overrightarrow{U_y}\right) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega\, r & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2\, r\, \overrightarrow{U_x}$$

Donc $\overrightarrow{a_e} = -\omega^2 r \overrightarrow{U_x}$

L'accélération de Coriolis

$$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{v_r} = 2\begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ r^{\cdot} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\omega r^{\cdot}\overrightarrow{U_y}$$

Donc $\overrightarrow{a_c} = 2\omega r^{\cdot}\overrightarrow{U_y}$

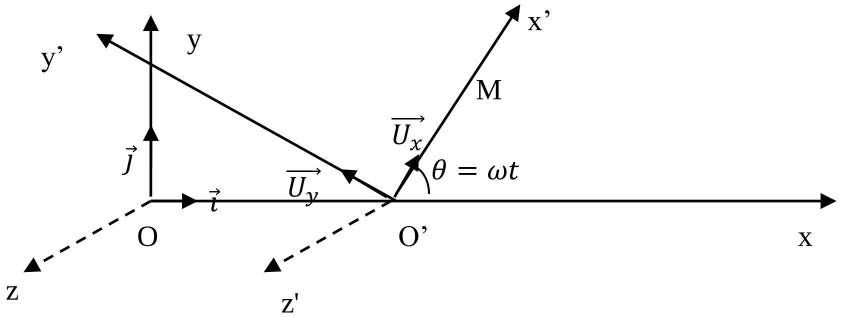
La vitesse absolue

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = r^{\cdot}\overrightarrow{U_x} + \omega\, r\, \overrightarrow{U_y}$$

L'accélération absolue :

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e} = (r^{\cdot\cdot} - \omega^2 r)\overrightarrow{U_x} + 2\omega r^{\cdot}\overrightarrow{U_y}$$

<u>**Exercice 4**</u>



La vitesse relative

$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/(R')$ avec $\overrightarrow{O'M} = t^2\overrightarrow{U_x}$ Donc $\overrightarrow{v_r} = 2t\overrightarrow{U_x}$

La vitesse d'entrainement :

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$$

On cherche le vecteur $\overrightarrow{OO'}$

Le point O' se déplace sur l'axe (Ox) avec une vitesse v, alors $\overrightarrow{v_{O'}} = \frac{dOO'}{dt}\vec{\imath} = v\vec{\imath}$

A t=0, x=0 donc $\frac{dOO'}{dt} = v \Rightarrow OO' = vt \quad donc \ \overrightarrow{OO'} = vt\vec{\imath}$

$$\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ t^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega t^2\overrightarrow{U_y} \quad et \ \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = v\vec{\imath}$$

Donc $\overrightarrow{v_e} = \omega t^2\overrightarrow{U_y} + v\vec{\imath}$

Il faut écrire $\overrightarrow{v_e}$ dans un meme système de coordonnées, pour cela on va écrire $\vec{\imath}$ en fonction de $\overrightarrow{U_x}$et$\overrightarrow{U_y}$

Nous avons : $\begin{cases} \overrightarrow{U_x} = cos\ \theta\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{U_y} = -\sin\theta\vec{\imath} + cos\ \theta\,\vec{\jmath} \end{cases} \Rightarrow \vec{\imath} = cos\ \theta\overrightarrow{U_x} - \sin\theta\,\overrightarrow{U_y}$

Donc $\overrightarrow{v_e} = \omega t^2\overrightarrow{U_y} + v\left(cos\ \theta\overrightarrow{U_x} - \sin\theta\,\overrightarrow{U_y}\right) = v\ cos\ \theta\overrightarrow{U_x} + (\omega t^2 - v\ sin\ \theta)\overrightarrow{U_y}$

La vitesse absolue

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = 2t\overrightarrow{U_x} + \omega t^2\overrightarrow{U_y} + v\left(cos\ \theta\overrightarrow{U_x} - \sin\theta\,\overrightarrow{U_y}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_a} = (2t + v\ cos\ \theta)\overrightarrow{U_x} + (\omega t^2 - v\ sin\ \theta)\overrightarrow{U_y}$$

L'accélération relative

$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}/(R')$ avec $\overrightarrow{v_r} = 2t\overrightarrow{U_x}$ Donc $\overrightarrow{a_r} = 2\overrightarrow{U_x}$

L'accélération d'entrainement

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M}$$

$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}\,, \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0}$car ω constante

Et $\vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) = \vec{\omega}\Lambda\omega t^2\overrightarrow{U_y} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega t^2 & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 t^2\overrightarrow{U_x}$

Donc $\overrightarrow{a_e} = -\omega^2 t^2\overrightarrow{U_x}$

L'accélération de Coriolis

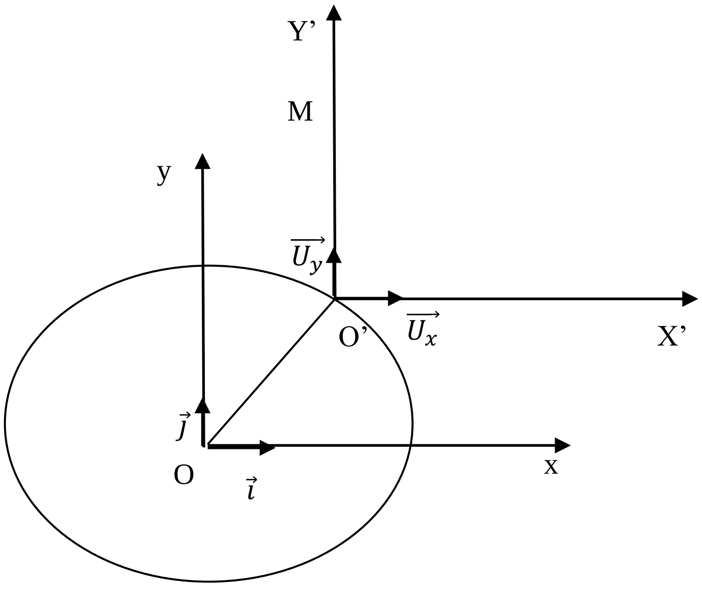
$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{v_r} = 2\begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 2t & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4t\omega\overrightarrow{U_y}$

L'accélération absolue

$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e} = 2\overrightarrow{U_x} - \omega^2 t^2\overrightarrow{U_x} + 4t\omega\overrightarrow{U_y}$

Alors$\overrightarrow{a_a}$=$(2 - \omega^2 t^2)\overrightarrow{U_x} + 4t\ \omega\overrightarrow{U_y}$

<u>Exercice 5</u>



A t=0, y'=0 et v=v_0

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \qquad avec\ \overrightarrow{OO'} = \mathrm{r}(\cos\ \omega t\,\vec{\imath} + \sin\omega t\,\vec{\jmath})$

M se déplace sur l'axe (O'Y) parallèle à Oy avec une accélération γ constante

$\overrightarrow{O'M} = y\overrightarrow{U_y},\quad \gamma = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow dv = \gamma dt$

Après intégration $v = \gamma t + v_0$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma t + v_0 \Rightarrow dy = \gamma t dt + v_0 dt \quad donc\ y = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t$$

$\overrightarrow{O'M} = \left(\dfrac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t\right)\overrightarrow{U_y}$

Puisque O'Y//Oy donc $\overrightarrow{U_y} = \vec{\jmath}$ donc $\overrightarrow{O'M} = \left(\frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t\right)\overrightarrow{U_y} = \left(\frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t\right)\vec{\jmath}$

Alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \mathrm{r}(\cos\ \omega t\,\vec{\imath} + \sin\omega t\,\vec{\jmath}) + \left(\frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t\right)\vec{\jmath}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \mathrm{r}\cos\ \omega t\,\vec{\imath} + \left(r\sin\omega t + \tfrac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t\right)\vec{\jmath}$$

La vitesse absolue

$\overrightarrow{v_a} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/(R) = -\mathrm{r}\,\omega\sin\ \omega t\,\vec{\imath} + (r\omega\cos\omega t + \gamma t + v_0)\vec{\jmath}$

L'accélération absolue

$\overrightarrow{a_a} = \dfrac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}/(R) = -\mathrm{r}\,\omega^2\cos\ \omega t\,\vec{\imath} + (-r\omega^2\sin\omega t + \gamma\,)\vec{\jmath}$

La vitesse relative

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/(R') = (\gamma t + v_0)\vec{\jmath}$$

La vitesse d'entrainement :

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$$

$\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0}$ car les vecteurs unitaires des deux repères sont parallèles, donc il n'ya pas un mouvement de rotation.

Il y a un mouvement de translation

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = -\mathrm{r}\ \omega \sin\ \omega\mathrm{t}\,\vec{\imath} + r\omega \cos \omega\mathrm{t}\,\vec{\jmath}$$

Vérifions que $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = (\gamma t + v_0)\vec{\jmath} - \mathrm{r}\ \omega \sin\ \omega\mathrm{t}\,\vec{\imath} + r\omega \cos \omega\mathrm{t}\,\vec{\jmath}$$
$$= -\mathrm{r}\ \omega \sin\ \omega\mathrm{t}\,\vec{\imath} + (r\omega \cos \omega\mathrm{t} + \gamma t + v_0)\vec{\jmath}$$

Donc $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$ est vérifiée

L'accélération relative

$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}/(R')$ avec$\overrightarrow{v_r} = (\gamma t + v_0)\vec{\jmath}$

Donc $\overrightarrow{a_r} = \gamma\vec{\jmath}$

L'accélération d'entrainement

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0}\ \ et\ \vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) = \vec{0}$$

Car il y a un mouvement de translation entre les repères

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = -\mathrm{r}\ \omega^2 \cos\ \omega\mathrm{t}\,\vec{\imath} + -r\omega^2 \sin \omega\mathrm{t}\,\vec{\jmath}$$

Donc $\overrightarrow{a_e} = -\omega^2 r_0(\cos\ \omega\mathrm{t}\vec{\imath} + \sin \omega\mathrm{t}\,\vec{\jmath})$

L'accélération de Coriolis

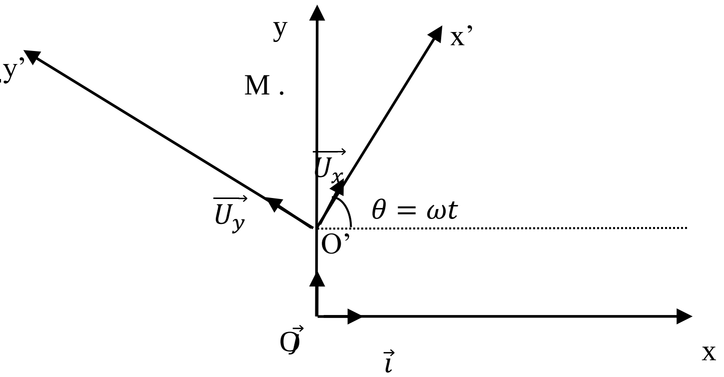
$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{v_r} = \vec{0}$

Vérifions que $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e}$

$$\overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e} = \gamma\vec{j} + -\mathrm{r}\,\omega^2\cos\,\omega t\,\vec{\imath} + -r\omega^2\sin\omega t\,\vec{j}$$
$$= -\mathrm{r}\,\omega^2\cos\,\omega t\,\vec{\imath} + (-r\omega^2\sin\omega t + \gamma\,)\vec{j}$$

Donc $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e}$ est vérifiée

Exercice supplémentaire



Les coordonnées du point M dans le repère mobile M(t^2, t)/(R') Donc $\overrightarrow{O'M}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{O'M} = t^2\overrightarrow{U_x} + t\overrightarrow{U_y}$$

O' se déplace sur l'axe(Oy) avec une accélération constante γ , avec, à l'instant t=0, l'axe (O'X) est confondu avec (Ox). Donc v_0=0 et y_0=0 donc

$$\overrightarrow{OO'} = y\vec{j},\quad \gamma = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = \gamma dt$$

Après intégration ***v=γt*** et $\frac{dy}{dt} = \gamma t \Rightarrow dy = \gamma t dt \quad donc\ y = \frac{1}{2}\gamma t^2$

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\gamma t^2\vec{j}$$

La vitesse relative

$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/(R')$ avec $\overrightarrow{O'M} = t^2\overrightarrow{U_x} + t\overrightarrow{U_y}$

Donc $\overrightarrow{v_r} = 2t\overrightarrow{U_x} + \overrightarrow{U_y}$

La vitesse d'entrainement :

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$$

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\gamma t^2\vec{j} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \gamma t\vec{j}$$

$$\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ t^2 & t & 0 \end{vmatrix} = -\omega t\overrightarrow{U_x} + \omega t^2\overrightarrow{U_y} \quad Donc$$

$$\overrightarrow{v_e} = \gamma t\vec{j} - \omega t\overrightarrow{U_x} + \omega t^2\overrightarrow{U_y}$$

Il faut écrire $\overrightarrow{v_e}$ dans un meme système de coordonnées, pour cela on va écrire $\vec{j}$ en fonction de $\overrightarrow{U_x}$et$\overrightarrow{U_y}$

Nous avons : $\begin{cases} \overrightarrow{U_x} = cos\ \theta\vec{\imath} + \sin\theta\ \vec{j} \\ \overrightarrow{U_y} = -\sin\theta\vec{\imath} + cos\ \theta\ \vec{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{j} = sin\ \theta\overrightarrow{U_x} + cos\ \theta\ \overrightarrow{U_y}$

Donc$\overrightarrow{v_e} = \omega t^2\overrightarrow{U_y} - \omega t\overrightarrow{U_x} + \gamma t\left(sin\ \theta\overrightarrow{U_x} + cos\ \theta\ \overrightarrow{U_y}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_e} = (\gamma t\ sin\ \theta - \omega t)\overrightarrow{U_x} + (\omega t^2 + \gamma t cos\ \theta)\overrightarrow{U_y}$$

La vitesse absolue

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = 2t\overrightarrow{U_x} + \overrightarrow{U_y} + (\gamma t\ sin\ \theta - \omega t)\overrightarrow{U_x} + (\omega t^2 + \gamma t cos\ \theta)\overrightarrow{U_y}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_a} = (\gamma t\ sin\ \theta - \omega t + 2t)\overrightarrow{U_x} + (\omega t^2 + \gamma t cos\ \theta + 1)\overrightarrow{U_y}$$

L'accélération relative

$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}/(R')$ avec$\overrightarrow{v_r} = 2t\overrightarrow{U_x} + \overrightarrow{U_y}$ Donc $\overrightarrow{a_r} = 2\overrightarrow{U_x}$

L'accélération d'entrainement

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M}$$

$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0}$car ω constante et $\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \gamma\vec{j}$

et$\vec{\omega}\Lambda\left(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}\right) = \vec{\omega}\Lambda\left(-\omega t\overrightarrow{U_x} + \omega t^2\overrightarrow{U_y}\right) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & -\overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega t & \omega t^2 & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 t^2\overrightarrow{U_x} - \omega^2 t\overrightarrow{U_y}$

Donc $\overrightarrow{a_e} = \gamma\vec{j} - \omega^2 t^2\overrightarrow{U_x} - \omega^2 t\overrightarrow{U_y} = \gamma\left(\sin\theta\overrightarrow{U_x} + cos\,\theta\,\overrightarrow{U_y}\right) - \omega^2 t^2\overrightarrow{U_x} - \omega^2 t\overrightarrow{U_y}$

$\overrightarrow{a_e} = (\gamma\sin\theta - \omega^2 t^2)\overrightarrow{U_x} + (\gamma\, cos\,\theta \ - \omega^2 t)\overrightarrow{U_y}$

L'accélération de Coriolis

$$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{v_r} = 2\begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 2t & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\omega\overrightarrow{U_x} + 4t\omega\overrightarrow{U_y}$$

L'accélération absolue

$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e}$

$\Rightarrow \overrightarrow{a_a} = 2\overrightarrow{U_x} + (\gamma\sin\theta - \omega^2 t^2)\overrightarrow{U_x} + (\gamma\, cos\,\theta \ - \omega^2 t)\overrightarrow{U_y} + 4t\,\omega\overrightarrow{U_y} - 2\omega\overrightarrow{U_x}$

Alors $\overrightarrow{a_a}$=$(2 - 2\omega + \gamma\sin\theta - \omega^2 t^2)\overrightarrow{U_x} + (\gamma\, cos\,\theta \ - \omega^2 t + 4t\omega\,)\overrightarrow{U_y}$