Chapitre II : Analyse vectorielle et systèmes de coordonnées

1ère partie : Analyse vectorielle

1 . Introduction

En physique, on utilise deux types de grandeurs : les grandeurs scalaires et les grandeurs vectorielles

-Grandeur scalaire : définie par un nombre (un scalaire) et une unité appropriée comme : masse, longueur…

-Grandeur vectorielle : c'est une quantité définie par un scalaire, une unité et une direction comme : la vitesse $\vec{v}$, le poids $\vec{p}$…

2. Définition d'un vecteur :

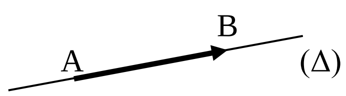
Un vecteur est un segment de droite orienté qui a les caractères suivants :

-<u>Origine</u> :مبدأ présente le point d'application « A»

-<u>Support</u> : حامل la droite qui porte le vecteur (Δ)

-<u>Direction</u> :اتجاه c'est le sens du vecteur (de A vers B)

-<u>Le module</u> : طويلة donne la valeur <u>algébrique</u> du vecteur $\overrightarrow{AB}$ notée



$$\|\overrightarrow{AB}\| = |\overrightarrow{AB}| = AB$$

3.Propriétés

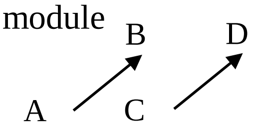
Vecteur libre : l'origine n'est pas fixe

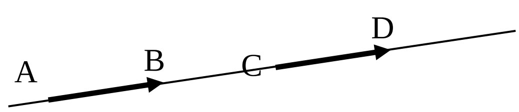
Vecteur glissant: le support est fixe par contre l'origine n'est pas fixe

Vecteur lié : l'origine est fixe

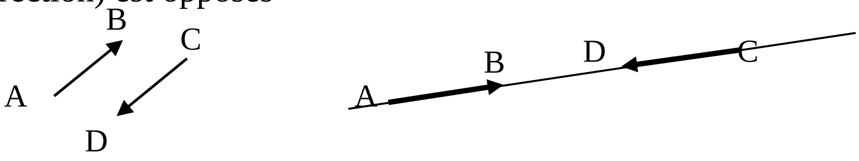
Deux vecteurs liés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ d'origines différents sont :

Egaux : s'ils ont la même direction, le même support ou des supports parallèles et le même module





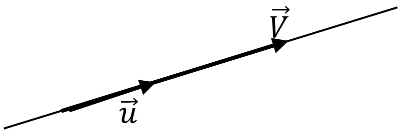
Opposé : s'ils le même support ou des supports parallèles, le même module mais le sens (la direction) est opposés



4.Vecteur unitaire :

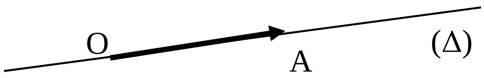
Un vecteur est dit unitaire si son module est égal à 1

On écrit : $|\vec{u}|$=1 et $\vec{V} = |\vec{V}|\,\vec{u}$



5. Mesure algébrique :

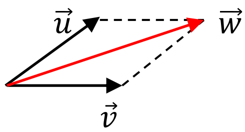
Soit un axe (Δ) portant les points O et A. O est l'origine l'abscisse du point A est la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{OA}$



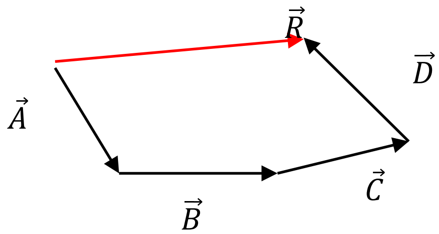
6.Opérations élémentaires sur les vecteurs :

6.1. Addition vectorielle

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$et $\vec{v}$ est $\vec{w}$ obtenue en utilisant le parallélogramme



Pour plusieurs vecteurs $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = \vec{R}$



Propriétés

$\vec{A} + \vec{B}$=$\vec{B} + \vec{A}$, $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$, $\vec{A} - \vec{B}$=$\vec{A} + (-\vec{B})$

Règle de Charles

Soit les trois points A, B et C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

6 .2 . Produit d'un vecteur par un scalaire :الجداء السلمي لشعاعين

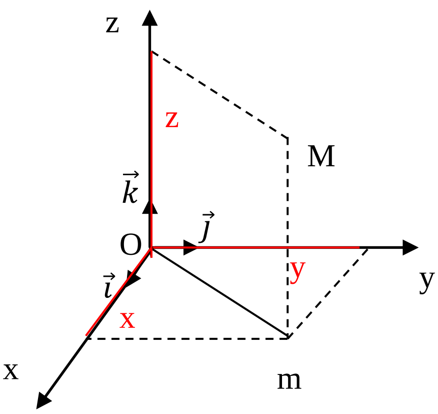
Le produit d'un vecteur $\vec{v}$ par un scalaire α est le vecteur $\vec{v}$, ce vecteur a le même support que $\vec{v}$. Les deus vecteurs ($\vec{v}\ et\ \alpha\vec{v}$) ont le même sens si α≥0 et ils sont des supports opposés si α≤0 .

$\lceil\alpha\vec{v}\rceil = |\alpha||\vec{v}|$, $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ et $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

7. Système de coordonnées cartésiennes tridimensionnelles :

Ce système est utilisé pour repérer un point dans l'espace. Il est composé de trois axes (Ox) ; (Oy) et (Oz) munis des vecteurs unitaires $\vec{\imath}, \vec{\jmath}\ et\ \vec{k}$

Soit x, y t z les projections du point M sur les axes Ox, Oy et Oz avec le point m est la projection du point M sir le plan (Oxy)



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$$

$\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{Om}_x + \overrightarrow{Om}_y$ avec $\begin{cases} \overrightarrow{Om}_x = x\vec{\imath} \\ \overrightarrow{Om}_y = y\vec{\jmath} \end{cases}$ $et\ \ \overrightarrow{mM} = z\vec{k}$

$\overrightarrow{OM} = \mathrm{x}\vec{\imath} + \mathrm{y}\vec{\jmath} + \mathrm{z}\vec{k}$

Donc x, y et z sont les coordonnées cartésiennes du point M

7 .1 Somme :

Soit deux vecteurs $\vec{A} et\ \vec{B}$, $\vec{A} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\ et\ \vec{B} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$

$\vec{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} et\ \vec{B}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ donc $\vec{A} + \vec{B} = (x+x')\vec{\imath} + (y+y')\vec{\jmath} + (z+z')\vec{k}$

7.2 Produit : $n\vec{A} = n\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = nx\ \vec{\imath} + ny\vec{\jmath} + nz\vec{k}$

7.3 Produit scalaire de deux vecteurs :الجداء السلمي لشعاعين

Soit deux vecteurs $\vec{A}et\ \vec{B}$ faisant entre eux un angle θ, le produit scalaire $\vec{A}.\vec{B} = m$ avec mest un scalaire tel que $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|\cos(\vec{A}\vec{B})$ avec $(\vec{A},\vec{B}) = \theta$

Le produit scalaire est commutatif $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

$\vec{A}.\vec{A} = \vec{A}^2 = A^2$

$$(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{C}+\vec{D}) = \vec{A}.\vec{C} + \vec{A}.\vec{D} + \vec{B}.\vec{C} + \vec{B}.\vec{D}$$

Si $\vec{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} et\ \vec{B}\begin{pmatrix} x\prime \\ y\prime \\ z\prime \end{pmatrix}$ alors $\vec{A}.\vec{B} = x.x' + y.y' + z.z'$

7.4 Produit vectoriel de deux vecteurs :الجداء الشعاعي لشعاعين

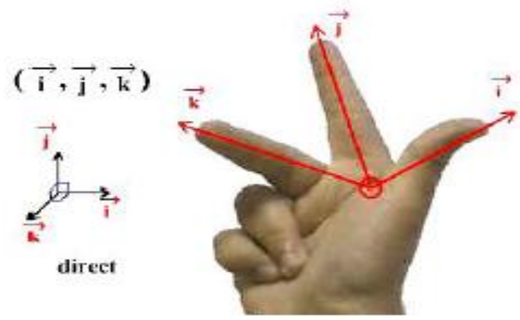
Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}et\ \vec{B}$est un vecteur $\vec{C}$ et s'écrit : $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$

7.4.1 Les caractéristiques du vecteur $\vec{C}$:

Le support : $\vec{C}$ est perpondiculaire au plan formé par les deux vecteurs $\vec{A}et\ \vec{B}$

Le sens : les trois vecteurs $\vec{A},\vec{B}\ et\ \vec{C}$ forment une triède directe

Le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite.

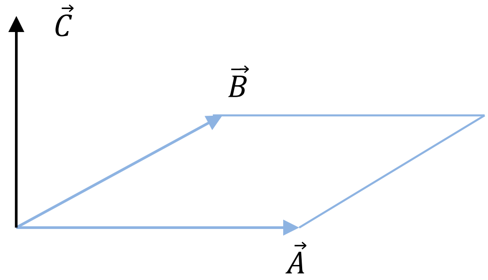


Le module : $|\vec{C}| = |\vec{A}|.|\vec{B}|sin(\vec{A},\vec{B})$

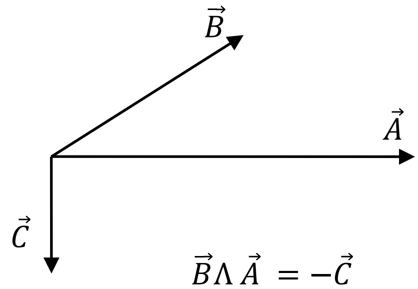
Le module du produit vectoriel correspond à l'air (la surface) du *parallélogramme* (متوازي الاضلاع) formé par les deux vecteurs $\vec{A}et\ \vec{B}$

Le produit vectoriel n'est pas commutatif (Anticommutatif)

$\vec{A}\wedge\vec{B} = -\vec{B}\wedge\vec{A}$ car $sin(\vec{A},\vec{B}) = -sin(\vec{B},\vec{A})$



$\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{C}$



$\vec{B}\wedge\vec{A} = -\vec{C}$

$$\vec{A}\wedge\left(\overrightarrow{B_1}+\overrightarrow{B_2}\right) = \vec{A}\wedge\overrightarrow{B_1} + \vec{A}\wedge\overrightarrow{B_2}$$

<u>Exemple</u> :

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$: $\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\jmath}\wedge\vec{k} = \vec{\imath}$ et $\vec{k}\wedge\vec{\imath} = \vec{\jmath}$ Par contre $\vec{\imath}\wedge\vec{k} = -\vec{\jmath}$

<u>Remarques</u> : Les propriétés du produit vectoriel sont :

- Non associatif : $\overrightarrow{V_1}\wedge\left(\overrightarrow{V_2}\wedge\overrightarrow{V_3}\right) \neq (\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2})\wedge\overrightarrow{V_3}$.
- Distributif par rapport à la somme vectorielle:

$$\overrightarrow{V_1}\wedge\left(\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_3}\right) \neq \left(\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}\right) + \left(\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_3}\right)$$

Pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$on aura

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ x & y & z\\ x' & y' & z'\end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix}y & z\\ y' & z'\end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix}x & z\\ x' & z'\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix}x & y\\ x' & y'\end{vmatrix}$$

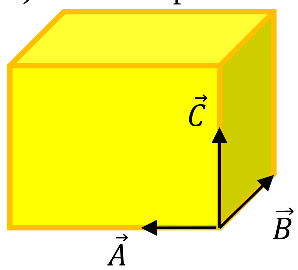
$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{\imath}(yz' - zx') - \vec{\jmath}(xz' - zx') + \vec{k}(xy' - yx')$$

7 .5. Produit mixte

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}\ et\ \vec{C}$ une quantité scalaire **m** tel que

$$m = (\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C}$$

Avec **m** présente le volume du parallélépipède (متوازي المستطيلات) construit par les trois vecteurs



$$(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C} = \vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{C} \wedge \vec{A}).\vec{B}$$

Le produit mixte est commutatif

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C} = \vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$$

8. Dérivé d'un vecteur

Soit le vecteur $\vec{A} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ qui varie en fonction du temps

Sa première dérivé par rapport au temps est

$$\overrightarrow{A'} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Le deuxième dérivée est

$$\overrightarrow{A''} = \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

-Dérivée d'un produit scalaire

$$(\vec{A}.\vec{B})' = \overrightarrow{A'}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{B}'$$

Si $\vec{B}$ est constant $(\vec{A}.\vec{B})' = \overrightarrow{A'}.\vec{B}$

$$(\vec{A}^2)' = 0\ car\ (\vec{A}^2)' = 2\overrightarrow{A'}.\vec{A} = 0$$

Le vecteur dérivé est perpoindiculaire au vecteur

Un vecteur s'écrit $\vec{A} = |\vec{A}|\vec{u} = A\vec{u}$,

si $\vec{u}$ est un vecteur variable alors $\vec{A}' = A'\vec{u} + A\overrightarrow{u'}$

TD n° 2 de Mécanique

1ère partie: Analyse vectorielle

Exercice1

$\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\ et\ \vec{k}$ étant les vecteurs unitaires des axes rectangulaire Oxyz, on considère les vecteurs :

$\vec{r_1}=\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-2\vec{k}$ $\quad\quad$ $\vec{r_2}=4\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+2\vec{k}$ $\quad\quad$ et $\quad\quad$ $\vec{r_3}=3\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}$

1. Représenter graphiquement ces 3 vecteurs.
2. Calculer leurs modules.
3. Calculer les composantes et les modules des vecteurs.
   $\vec{A}=\vec{r_1}+\vec{r_2}+\vec{r_3}$ et $\vec{B}=\vec{r_1}+\vec{r_2}-\vec{r_3}$
4. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $\vec{C}=\vec{r_1}+2\,\vec{r_2}$
5. Calculer les produits $\vec{r_1}\cdot\vec{r_2}$ et $\vec{r_1}\wedge\vec{r_2}$

Exercice 2

1. Dans un repère orthonormé Oxyz de vecteurs unitaires $\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\ et\ \vec{k}$, on considère les vecteurs :

$\vec{A}=a_1\,\vec{\imath}+a_2\vec{\jmath}+a_3\vec{k}$

et $\vec{B}=b_1\vec{\imath}+b_2\vec{\jmath}+b_3\vec{k}$

Calculer le cosinus de l'angle φ de ces deux vecteurs.

2. Soient les points M_1 (+1,+1,+1), M_2 (+2,+2,+1) et M_3 (+2,+1,0) ; calculer l'angle $M_1\widehat{M_2}M_3$
3. Déterminer l'équation du plan (p) passant par le point M_2 et perpendiculaire au vecteur $\vec{A}=3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}$

Exercice 3

Soient trois vecteurs $\vec{A},\ \vec{B}\ et\ \vec{C}$, tels que

$\vec{A}=-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}+3\vec{k}$, $\vec{B}=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}$, $\vec{C}=x\vec{\imath}+\vec{\jmath}+z\vec{k}$

Calculer, pour y=1, x et z pour que le vecteur $\vec{C}$ soit

a- Parallèle à $\vec{A}$ $\quad\quad$ b- Parallèle à $\vec{B}$
c- Perpendiculaire à $\vec{A}$ et $\vec{B}$ en même temps.

Exercice 4:

$\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\ et \vec{k}$ étant les vecteurs unitaires dans le repère orthonormé (Oxyz). Soient deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ définis par :

$\vec{A} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$ et $\vec{B} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 5\vec{k}$

1- Calculer ($\vec{A}.\vec{B}$) et déduire l'angle $\theta = (\vec{A},\vec{B})$
2- Donner ($\vec{A}\wedge\vec{B}$), que représente le module de ce produit ($|\vec{A}\wedge\vec{B}|$).

Exercice 5

On donne les trois vecteurs $\vec{V_1}(1, 1, 0)$, $\vec{V_2}(0, 1, 0)$ et $\vec{V_3}$ (0, 0, 2).

1. Calculer les normes des trois vecteurs $\|\vec{V_1}\|$, $\|\vec{V_2}\|$et $\|\vec{V_3}\|$, en déduire les vecteurs unitaires $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ des directions $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et de $\vec{V_3}$ respectivement.

2. Calculer cos $(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$, sachant que l'angle correspondant est compris entre 0 et π.

3. Calculer $(\vec{v_1}.\vec{v_2})$, $(\vec{v_2}\wedge\vec{v_3})$ et $\vec{v_1}.(\vec{v_2}\wedge\vec{v_3})$. Que représente chacun de ces trois produits ?

Exercice 6

On considère dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ les points A(2, 0,0), B(2, −2, 0) et C(2, 3, −1).

1. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$
2. Calculer l'aire du triangle OAB.
3. Calculer le produit mixte $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, En déduire le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs
4. Entre ces produits, quel sont les produits mixtes qu'on peut calculer

$$\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}\right);\ \left(\overrightarrow{OA}\,.\overrightarrow{OB}\right)\wedge\overrightarrow{OC}\ ;\quad \overrightarrow{OA}\wedge\left(\overrightarrow{OB}\,.\overrightarrow{OC}\right);$$

Exercice 7

Soit un vecteur $\vec{U} = (t\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})/(\sqrt{t^2+9})$

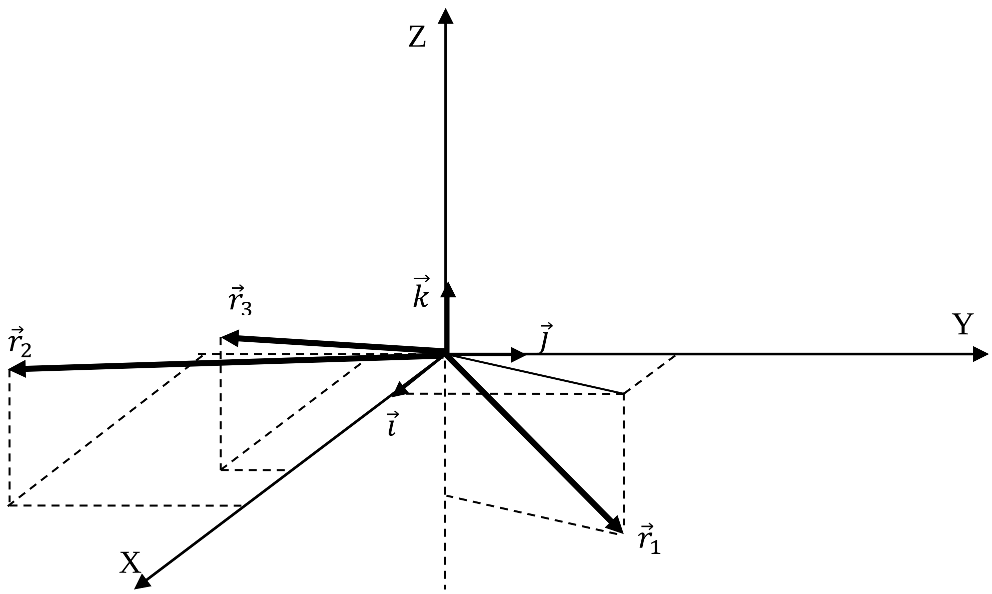
1. Montrer que $\vec{U}$ est un vecteur unitaire ?
2. Calculer sa dérivée par rapport au temps ?

Corrigés des exercices

Exercice 1

On a $\vec{r_1}=\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-2\vec{k}$ $\quad \vec{r_2}=4\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+2\vec{k}$ $\quad$ et $\quad \vec{r_3}=3\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}$

1- La représentation des vecteurs $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ et $\vec{r_3}$:



2- Les modules :

$$|\vec{r_1}| = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{r_2}| = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2} = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24}$$

$$|\vec{r_3}| = \sqrt{x_3^2+y_3^2+z_3^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

3- $\vec{A}=\vec{r_1}+\vec{r_2}+\vec{r_3}$ et $\vec{B}=\vec{r_1}+\vec{r_2}-\vec{r_3}$

$$\vec{A} = (x_1+x_2+x_3)\vec{\imath} + (y_1+y_2+y_3)\vec{\jmath} + (z_1+z_2+z_3)\vec{k} = 8\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

Donc $\vec{A} = 8\vec{\imath} + 2\vec{k}$

Son module : $|\vec{A}| = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$

$$\vec{B} = (x_1 + x_2 - x_3)\vec{\imath} + (y_1 + y_2 - y_3)\vec{\jmath} + (z_1 + z_2 - z_3)\vec{k} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$$

Donc $\vec{B} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$

Son module : $|\vec{B}| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$

4- Le vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{C} = \overrightarrow{r_1} + 2\overrightarrow{r_2}$:

$$\vec{C} = (1+8)\vec{\imath} + (3-4)\vec{\jmath} + (-2+4)\vec{k} = 9\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \vec{C} = 9\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

Nous avons $\vec{C} = |\vec{C}|\vec{u}$ $avec$ $|\vec{C}| = \sqrt{86}$

donc $$\vec{u} = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{9}{\sqrt{86}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{86}}\vec{\jmath} + \frac{2}{\sqrt{86}}\vec{k}$$

5- $\overrightarrow{r_1}.\overrightarrow{r_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$\Rightarrow \overrightarrow{r_1}.\overrightarrow{r_2} = 4 - 6 - 4 = -6$

Et $$\overrightarrow{r_1} \wedge \overrightarrow{r_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$\Longrightarrow \overrightarrow{r_1} \wedge \overrightarrow{r_2} = 2\vec{\imath} - 10\vec{\jmath} - 14\vec{k}$

Exercice 2

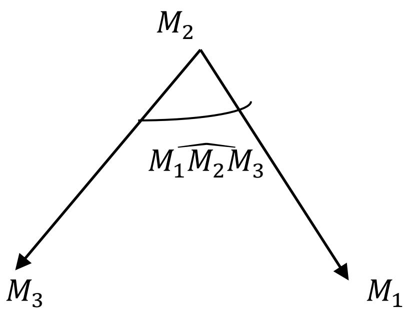
$\vec{A} = a_1\,\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$ et $\vec{B} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}$

1- On a $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|cos\varphi = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$$\Longrightarrow cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

2- Soit $M_1(1,1,1)$, $M_2(2,2,1)$ et $M_3(2,1,0)$.

Calculer l'angle $M_1\widehat{M_2}M_3$:



On a $\overrightarrow{M_2M_1} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-2 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

Et $\overrightarrow{M_2M_3} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 1-2 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{\jmath} - \vec{k}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{M_2M_1}.\overrightarrow{M_2M_3} = 1 \\ \overrightarrow{M_2M_1}.\overrightarrow{M_2M_3} = |\overrightarrow{M_2M_1}|.|\overrightarrow{M_2M_3}|.cos\theta = \sqrt{2}.\sqrt{2}.cos\theta = 2cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2cos\theta = 1 \Rightarrow cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm\pi/3$$

Alors $M_1\widehat{M_2}M_3 = \pm\pi/3$

4. l'équation du plan (p) passant par le point M_2 et perpendiculaire au vecteur $\vec{A} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$

Soit M un point de coordonnées (x,y,z).

$$\overrightarrow{M_2M} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

On sait que $\vec{A}$ perpendiculaire à ce plan donc :

$$\vec{A}.\overrightarrow{M_2M} = (x-2)3 - (y-2)2 + (z-1)1 = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 2y + z - 3 = 0 \text{ (*)}$$

(*) est l'équation du plan passant par $M_2(2,2,1)$ et perpondiculaire au vecteur $\vec{A} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$

Exercice 3

Soit trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$, tels que

$\vec{A} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{C} = x\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + z\vec{k}$

Calculer x,y et z pour que le vecteur $\vec{C}$ soit :

a- $\vec{C}$ Parallèle à $\vec{A}$ si $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{C} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{C} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ x & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & z \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ x & z \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \vec{A} \wedge \vec{C} = (z-3)\vec{\imath} - (-2z-3x)\vec{\jmath} + (-2-x)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z-3=0 \\ -2z-3x=0 \\ -2-x=0 \end{cases} \qquad donc \begin{cases} x=-2 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{C} = -2\vec{\imath} + 3\vec{k}$$

b- $\vec{C}$ Parallèle à $\overrightarrow{B}$ si $\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ x & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & z \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ x & z \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ x & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \vec{B} \wedge \vec{C} = (-z-1)\vec{\imath} - (2z-x)\vec{\jmath} + (2+x)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -z-1=0 \\ 2z-x=0 \\ 2+x=0 \end{cases} \qquad donc \begin{cases} x=-2 \\ z=-1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{C} = -2\vec{\imath} - \vec{k}$$

c- $\vec{C}$ Perpendiculaire à $\overrightarrow{A}$ et $\vec{B}$ en même temps si $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{C} = (1+3)\vec{\imath} - (-2-6)\vec{\jmath} + (2-2)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{C} = 4\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}$$

Exercice 4 :

A-Soit les deux vecteurs $\vec{A}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} et\ \vec{B}\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$

1- Le produit scalaire

$\vec{A}.\vec{B} = -2 + 4 + 10 = 12$

D'après la deuxième écriture du produit scalaire$\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \cos(\vec{A}, \vec{B})$

$\|\vec{A}\| = \sqrt{6}, \|\vec{B}\| = \sqrt{45}$ donc cos($\vec{A}$,$\vec{B}$)=$\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|} = \frac{12}{\sqrt{6}.\sqrt{45}}$=0.730

alors L'angle θ=($\vec{A}$,$\vec{B}$)=43.08°

2- Produit vectoriel

$$\vec{A}\Lambda\vec{B} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\-1 & 1 & -2\\2 & 4 & -5\end{vmatrix} = \big(-5-(-8)\big)\vec{\imath} - \big(5-(-4)\big)\vec{\jmath} + (-4-2)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{A}\Lambda\vec{B} = 3\vec{\imath} - 9\vec{\jmath} - 6\vec{k}$$

Le produit vectoriel $\vec{A}\Lambda\vec{B}$donne un vecteur perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs $\vec{A}\ et \vec{B}$ et le module de ce produit ($\|\vec{A}\Lambda\vec{B}\|$) présente la surface du parallélogramme formé par les deux vecteurs $\vec{A}\ et\vec{B}$

Exercice 5 :

On donne les trois vecteurs $\overrightarrow{V_1}$(1, 1, 0), $\overrightarrow{V_2}$(0, 1, 0) et $\overrightarrow{V_3}$ (0, 0, 2).

1. Calculer les normes $\|\overrightarrow{V_1}\|$, $\|\overrightarrow{V_2}\|$et $\|\overrightarrow{V_3}\|$:

Calculons les normes des différents vecteurs et les vecteurs unitaires de leurs directions respectives.

$$\|\overrightarrow{V_1}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{v_1} = \frac{\overrightarrow{V_1}}{\|\overrightarrow{V_1}\|};\ \ \overrightarrow{v_1}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$$

$$\|\overrightarrow{V_2}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1 \Rightarrow \overrightarrow{v_2} = \frac{\overrightarrow{V_2}}{\|\overrightarrow{V_2}\|} = \vec{j};\ \ \overrightarrow{v_2}(0, 1, 0)$$

$$\|\overrightarrow{V_3}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{v_3} = \frac{\overrightarrow{V_3}}{\|\overrightarrow{V_3}\|};\ \ \overrightarrow{v_3}(0, 0, 1)$$

2. On calcule cos $(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}})$ comme suit :

$$\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad et\ \overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = \|\overrightarrow{v_1}\|.\|\overrightarrow{v_2}\|.\cos(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}})$$

$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Nous avons :

$$\overrightarrow{v_1}\,.\,\overrightarrow{v_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = \vec{\imath}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3} = \vec{\imath}(1,0,0)$$

$$\overrightarrow{v_1}\,.\,(\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 + 0 \times 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Le premier terme représente le produit scalaire entre les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, il est égal au produit du module de la projection de $\overrightarrow{v_1}$ sur $\overrightarrow{v_2}$ multiplié par le module de $\overrightarrow{v_2}$.
- Le deuxième terme est le produit vectoriel entre $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$; son module est la surface du parallélogramme formé par les deux vecteurs
- Le dernier terme est le produit mixte entre $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ et qui n'est d'autre que le volume du parallélépipède construit sur la base des trois vecteurs.

Exercice 6

A(2, 0,0), B(2, −2, 0) et C(2, 3, −1).

1. Le produit vectoriel $\overrightarrow{OA}\Lambda\overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix};\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\ donc\ \overrightarrow{OA}\Lambda\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\2 & 0 & 0\\2 & -2 & 0\end{vmatrix}=-4\vec{k}$$

L'aire du triangle (OAB) est la moitié de l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$

S(OAB)=$\frac{|\overrightarrow{OA}\Lambda\overrightarrow{OB}|}{2}=\frac{4}{2}=2$

2. Le produit mixte ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$), et le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs

$$\boldsymbol{(\overrightarrow{OA}\Lambda\overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=4}$$

Donc le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs=4

Les produits qu'on peut calculer sont

$(\overrightarrow{OA}\Lambda\overrightarrow{OB}).\,\overrightarrow{OC}\ =\ \overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB}\Lambda\overrightarrow{OC});$

Par contre ces deux produits sont faux car le produit vectoriel ne peut être qu'entre deux vecteurs

$(\overrightarrow{OA}\,.\overrightarrow{OB})\wedge\overrightarrow{OC}$; ; $\overrightarrow{OA}\Lambda(\overrightarrow{OB}\,.\overrightarrow{OC});$

Exercice 7

Soit un vecteur $\vec{U}=(t\vec{\imath}+3\vec{\jmath})/(\sqrt{t^2+9})$

1- $\vec{U}$ est un vecteur unitaire ?

Il faut vérifier que $|\vec{U}|=1$

$\left|\overrightarrow{U}\right| = \sqrt{\frac{1}{(t^2+9)}(t^2+9)}$=1

Donc $\overrightarrow{U}$ est un vecteur unitaire.

2- La dérivée de $\overrightarrow{U}$:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{\left(\sqrt{t^2+9}\right)}\right)\vec{\imath} + \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{\left(\sqrt{t^2+9}\right)}\right)\vec{\jmath}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{1.\sqrt{t^2+9} - t.\frac{2t}{2\sqrt{t^2+9}}}{t^2+9}\vec{\imath} + \frac{-\frac{2t}{2\sqrt{t^2+9}}.3}{t^2+9}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \left(\frac{t^2 - t^2 + 9}{(t^2+9)^{3/2}}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{-3t}{(t^2+9)^{3/2}}\right)\vec{\jmath}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \left(\frac{9}{(t^2+9)^{3/2}}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{-3t}{(t^2+9)^{3/2}}\right)\vec{\jmath}$$

2ème partie : Système usuel de coordonnées

1. Introduction

Pour résoudre un problème en physique, il faut repérer la position du point mobile M dans l'espace $\overrightarrow{OM\ (t)}$

La position doit être repérer à partir d'un référentiel (repère), on est amené à choisir le repère adéquat pour l'utiliser selon le problème qu'on veut résoudre

Généralement, on utilise les *coordonnées Cartésiennes, Polaires, Cylindriques ou Sphériques*

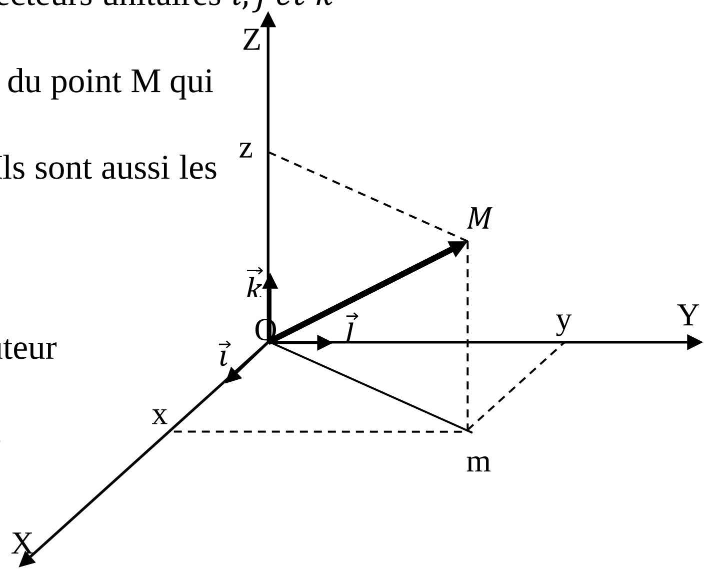
2. Coordonnées cartésiennes

Soit le repère R(O,x,y,z) avec les vecteurs unitaires $\vec{\imath}, \vec{\jmath}\ et\ \vec{k}$

Avec x, y et z sont les coordonnées du point M qui donnent sa position dans l'espace. Ils sont aussi les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$

x : abscisse ; y : ordonnée et z : hauteur

m est la projection du point M dans le plan (Oxy)



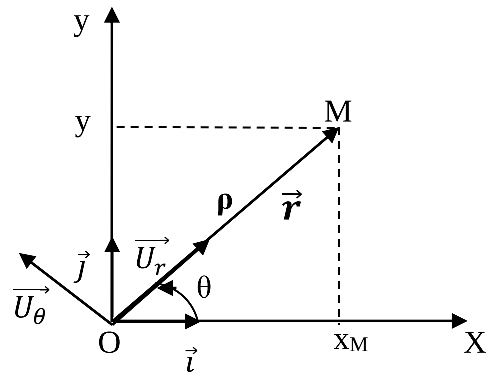
2.1. Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Les vecteurs unitaires $\vec{\imath}, \vec{\jmath}\ et\ \vec{k}$ constituent une base liée aux axes (Ox) ; (Oy) et (Oz).

3. Coordonnées polaires

Quand le mouvement d'un point matériel est plan, on peut repérer la position du point matériel M par les coordonnées polaires (ρ, θ).



Où $\rho = |\overrightarrow{OM}| = |\vec{r}|$ et $\theta = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM})$ avec $0 < \theta < 2\pi$.

ρ est le rayon polaire et θ est l'angle polaire

3 .1 Vecteur position

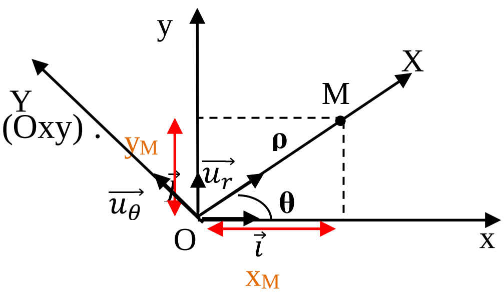
Le vecteur position d'un point matériel M en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho \vec{U}_r$$

Les vecteurs unitaires $\vec{U}_r$ est suivant $\overrightarrow{OM}$et $\vec{U}_\theta$ est perpendiculaire à $\vec{U}_r$ et $\overrightarrow{OM}$ dans le sens de θ ($\vec{U}_r \perp \vec{U}_\theta$)

3.2 Relations de passage entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires

On fait la projection du point M dans le plan (Oxy) .



$$\begin{cases} \boldsymbol{x_M = |\overrightarrow{OM}|\cos\theta = \rho\cos\theta} \\ \boldsymbol{y_M = |\overrightarrow{OM}|\sin\theta = \rho\sin\theta} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath} \Rightarrow \overrightarrow{OM}/cart = \rho\cos\theta\vec{\imath} + \rho\sin\theta\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{OM}/pol = \rho\vec{U}_r \text{ et } \overrightarrow{OM}/cart = \rho(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath})$$

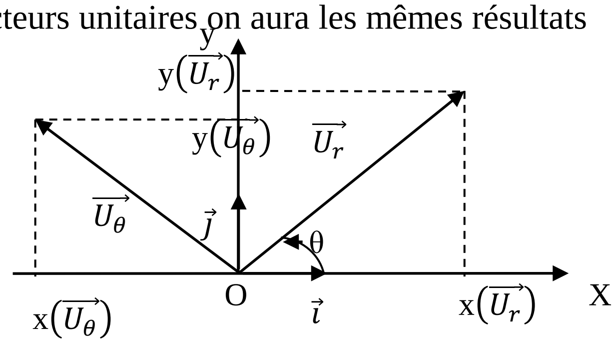
$$\Rightarrow \vec{U}_r = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$$

Règle : ***la dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à un angle est un vecteur unitaire perpendiculaire dans le sens direct***

Le vecteur $\overrightarrow{u_\theta} \perp \overrightarrow{u_r}$ dans le sens de θ qui correspond au sens direct donc $\overrightarrow{u_\theta} = \frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta}$

Donc $\overrightarrow{u_\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$

En faisant la projection des vecteurs unitaires on aura les mêmes résultats



$\overrightarrow{u_r} = x(\overrightarrow{u_r})\vec{\imath} + y(\overrightarrow{u_r})\vec{\jmath} \Rightarrow \overrightarrow{u_r} = |\overrightarrow{u_r}|\cos\theta\vec{\imath} + |\overrightarrow{u_r}|\sin\theta\vec{\jmath}$ avec $|\overrightarrow{u_r}| = 1$ puisque c'est un vecteur unitaire donc $\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{u_\theta} = x(\overrightarrow{u_\theta})\vec{\imath} + y(\overrightarrow{u_\theta})\vec{\jmath} \Rightarrow \overrightarrow{u_\theta} = -|\overrightarrow{u_\theta}|\sin\theta\vec{\imath} + |\overrightarrow{u_\theta}|\cos\theta\vec{\jmath}$ avec $|\overrightarrow{u_\theta}| = 1$ puisque c'est un vecteur unitaire donc $\overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$

Pour écrire les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ on utilise le tableau de passage

	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$
$\overrightarrow{u_r}$	cosθ	sinθ
$\overrightarrow{u_\theta}$	- sinθ	cosθ

$\vec{\imath} = \cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta}$

$\vec{\jmath} = \sin\theta\overrightarrow{u_r} + cos\theta\overrightarrow{u_\theta}$

Exemple :

Ecrire le vecteur $\vec{A} = 2x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

$\begin{cases} x = \rho\, cos\theta \\ y = \rho\, sin\theta \end{cases}$ et $\begin{cases} \vec{\imath} = \cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{\jmath} = \sin\theta\overrightarrow{u_r} + cos\theta\overrightarrow{u_\theta} \end{cases}$

Donc $\vec{A} = 2\,\rho\,cos\theta\,(\cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta}) + \rho\,sin\theta\,(\sin\theta\overrightarrow{u_r} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta})$

$\Rightarrow \vec{A} = 2\,\rho\,cos^2\theta\overrightarrow{u_r} - 2\rho(\cos\theta\sin\theta)\overrightarrow{u_\theta} + \rho\,sin^2\theta\,\overrightarrow{u_r} + \rho(\sin\theta\cos\theta)\overrightarrow{u_\theta}$

$\Rightarrow \vec{A} = \rho\,(2cos^2\theta + sin^2\theta)\overrightarrow{u_r} - \rho(\cos\theta\sin\theta)\overrightarrow{u_\theta}$

$\Rightarrow \vec{A} = (\rho\,cos^2\theta + 1)\overrightarrow{u_r} - \rho(\cos\theta\sin\theta)\overrightarrow{u_\theta}$

4. Coordonnées cylindriques

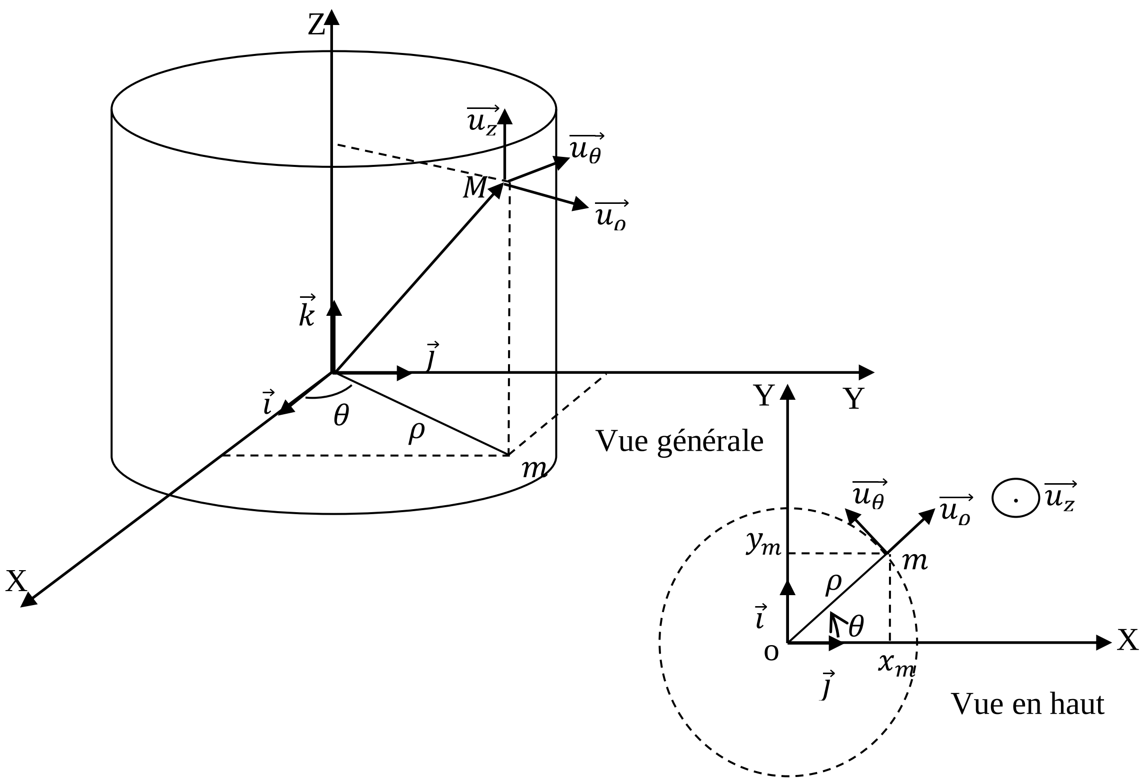
Si on ajoute aux coordonnées polaires la composante « z » dans l'espace, on aura les coordonnées cylindriques.

Soit R(Oxyz) et un point M appartenant à un cylindre. Le point M est repérer par les trois coordonnées ρ, θ (coordonnées polaires) et z

$$\text{Avec}\begin{cases}\rho = |\overrightarrow{Om}|,\ \ 0 < \rho < R\\ \theta = \left((Ox), \overrightarrow{Om}\right), 0 < \theta < 2\pi\\ z = z_M\ ,\ \ 0 < z < H\end{cases}$$

Où m est la projection du point M sur le plan (Oxy).

R est le rayon du cylindre et H la hauteur du cylindre.



4.1. Vecteur position

Le vecteur position en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) dans le repère orthonormé R'$(O, \overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ s'écrit : hauteur

$$\begin{cases} \vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} \ (Relation\ de\ \text{Charles}) \\ \overrightarrow{Om} = \rho\overrightarrow{u_\rho} \ (Coordonnées\ polaires) \\ \overrightarrow{mM} = z\overrightarrow{u_z} \ (\ hauteur\ \ du\ cylindre) \end{cases} \Rightarrow \vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\overrightarrow{u_z}$$

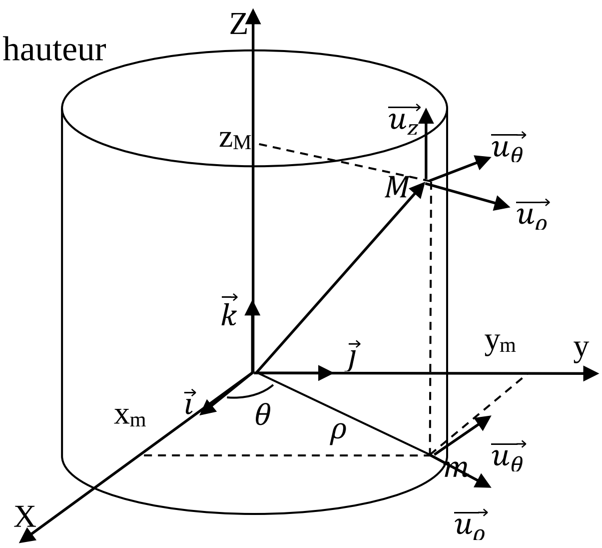
Les vecteurs unitaires

Les vecteurs unitaires $\vec{U}_\rho$ est suivant $\overrightarrow{Om}$ (m est la projection du point M sur le plan (Oxy))et $\vec{U}_\theta$ est perpendiculaire à $\vec{U}_r$ et $\overrightarrow{Om}$ dans le sens de θ **($\vec{U}_\rho \perp \vec{U}_\theta$)** et $\vec{U}_z$ est suivant (Oz), **($\vec{U}_z \parallel \vec{k}$)** et il est perpendiculaire au plan formé les deux autres vecteurs unitaires ($\vec{U}_\rho$ et $\vec{U}_\theta$)

4.2. Relations de passage entre les coordonnées cylindriques et les coordonnées cartésiennes

En faisant la projection du point m sur les axes (Ox)et

(Oy) (comme les coordonnées polaires) z est la hauteur



$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \rho\cos\theta \\ \boldsymbol{y} = \rho\sin\theta \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM}\Big/_{cylin} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{OM}\Big/_{cart} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM}\Big/_{cart} = \rho\ (\cos\theta\ \vec{\imath} + \sin\theta\ \vec{\jmath}) + z\vec{k}$$

Par identification
$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\rho} = \cos\theta\ \vec{\imath} + \sin\theta\ \vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_\theta} = \dfrac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta} = -\sin\theta\ \vec{\imath} + \cos\theta\ \vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_z} = \vec{k} \end{cases}$$

En utilisant le tableau de passage

	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$	$\vec{k}$
$\overrightarrow{u_\rho}$	Cosθ	sinθ	0
$\overrightarrow{u_\theta}$	- sinθ	cosθ	0
$\overrightarrow{u_z}$	0	0	1

$\vec{\imath} = \cos\theta\overrightarrow{u_\rho} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta}$

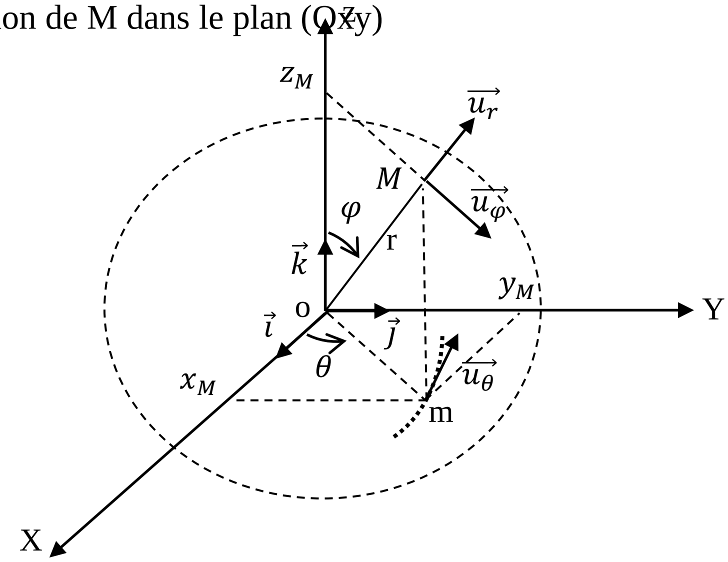
$\vec{\jmath} = \sin\theta\overrightarrow{u_\rho} + cos\theta\overrightarrow{u_\theta}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{u_z}$

5. Coordonnées sphériques

Quand le point O et la distance r séparant M et O, jouent un role caractéristique, l'utilisation des coordonnées sphériques (r, θ, φ) sont les mieux adaptées dans la base orthonormé $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ avec :

$$\begin{cases} r = \left|\overrightarrow{OM}\right|, \ \ 0 < \ r < R \\ \theta = \left((ox), \overrightarrow{Om}\right) \ 0 < \ \theta < 2\pi \\ \varphi = \left((oz), \overrightarrow{OM}\right) \ \ 0 < \ \varphi < \pi \end{cases}$$

Avec m est la projection de M dans le plan (Oxy)



5.1 Vecteur position :Le vecteur position en coordonnées sphériques (r, θ, φ) s'écrit par :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{U_r}$$

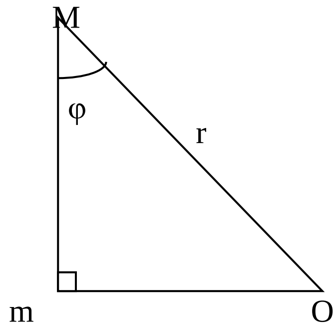
Les vecteurs unitaires

Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_r}$ est suivant $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{U_\varphi}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{U_r}$ et $\overrightarrow{OM}$ dans le sens de φ $(\overrightarrow{U_\varphi} \perp \overrightarrow{U_r})$ et $\overrightarrow{U_\theta}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{Om}$ $(\overrightarrow{U_\theta} \perp \overrightarrow{Om})$

5.2. Relations de passage entre les coordonnées sphériques et les coordonnées cartésiennes

En faisant la projection de m sur les axes (Ox) et (Oy)

$$\begin{cases} x = |\overrightarrow{Om}| \cos\theta \\ y = |\overrightarrow{Om}| \sin\theta \\ z = |\overrightarrow{mM}| \end{cases}$$



En prenant le triangle droit (OmM)

Nous avons Om=r sinφ et mM=r cosφ, en les remplaçants dans les relations de passage on aura

$$\begin{cases} x = r \sin\varphi \cos\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \\ z = r \cos\varphi \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM}/_{sph} = r\overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{OM}/_{cart} = r \sin\varphi \cos\theta\vec{\imath} + r \sin\varphi \sin\theta\vec{\jmath} + r\cos\varphi\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM}/_{cart} = r\left(\sin\varphi \cos\theta\vec{\imath} + \sin\varphi \sin\theta\vec{\jmath} + \cos\varphi\,\vec{k}\right)$$

Par identification

$$\overrightarrow{u_r} = sin\varphi\ cos\theta\vec{\imath} + \ sin\varphi\ \ sin\ \theta\vec{\jmath} + \cos\varphi\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{u_\varphi} = \frac{-d\overrightarrow{U_r}}{d(-\varphi)} = \frac{d\overrightarrow{U_r}}{d\varphi} = \ cos\varphi\ cos\theta\vec{\imath} + cos\ \varphi\ \ sin\ \theta\vec{\jmath} - \sin\varphi\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{U_\theta} = \overrightarrow{U_r}\Lambda\overrightarrow{U_\varphi} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ sin\varphi\ cos\theta & sin\varphi\ \ sin\ \theta & \cos\varphi \\ cos\varphi\ cos\theta & cos\ \varphi\ \ sin\ \theta & -\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \vec{\imath}(-sin^2\varphi\ \ sin\ \theta - cos\ ^2\varphi\ \ sin\ \theta) - \vec{\jmath}(-sin^2\varphi\ cos\theta - cos^2\varphi\ cos\theta)$$

$$+ \vec{k}(sin\varphi\ cos\theta cos\ \varphi\ \ sin\ \theta - sin\varphi\ \ sin\ \theta cos\varphi\ cos\theta)$$

$$\overrightarrow{U_\theta} = -\sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}$$

En utilisant le tableau de pasage

	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$	$\vec{k}$
$\overrightarrow{u_r}$	$sin\varphi\ cos\theta$	$sin\varphi\ \ sin\ \theta$	$\cos\varphi$
$\overrightarrow{u_\varphi}$	$cos\varphi\ cos\theta$	$cos\ \varphi\ \ sin\ \theta$	-sin φ
$\overrightarrow{u_\theta}$	$-\sin\theta$	$cos\theta$	1

$$\vec{\imath} = \ sin\varphi\ cos\theta\ \overrightarrow{u_r} + cos\varphi\ cos\theta\ \overrightarrow{u_\varphi} - \sin\theta\ \overrightarrow{u_\theta}$$

$$\vec{\jmath} = \ sin\varphi\ sin\theta\ \overrightarrow{u_r} + cos\varphi\ sin\theta\ \overrightarrow{u_\varphi} + \cos\theta\ \overrightarrow{u_\theta}$$

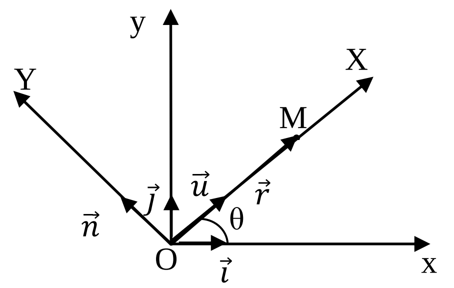
$$\vec{k} = \ cos\varphi\ \ \overrightarrow{u_r} - \ sin\varphi\ \overrightarrow{u_\varphi}$$

<u>TD n° 2 de Mécanique</u>

2ème partie : systèmes de coordonnées

Exercice1

On considère un vecteur $\vec{r}$, de module r = OM= a θ, porté par un axe OX faisant avec Ox l'angle variable θ. On désigne par $\vec{u}$ le vecteur unitaire de OX et par $\vec{n}$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{u}$.

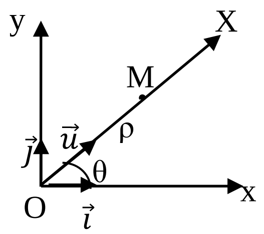


1. Exprimer $\frac{d\vec{r}}{d\theta}$ en fonction de a, θ, $\vec{u}$ et $\vec{n}$.
2. Représenter le vecteur $\frac{d\vec{r}}{d\theta}$ d'origine M.
3. Calculer $\frac{d\vec{r}}{d\theta}$

Exercice 2

A) Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y).

1. Ecrire x et y en fonction des coordonnées polaires ρ et θ.
2. Donner l'expression du vecteur unitaire $\vec{u}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
3. Calculer $d\vec{u}/_{d\theta}$, que représente ce vecteur ?



B) Si la position du point M est donnée par $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = t^2\vec{u} \\ \theta = \omega t \end{cases}$ (ω constante)

Trouver l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ en coordonnées polaires.

Exercice 3

Soient dans un repère orthonormé (Oxyz) deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ perpendiculaires et ayant le même origine de telle sorte que ($\vec{u}, \vec{v}$, $\overrightarrow{Oz}$) forme un trièdre direct.

Si θ = ($\overrightarrow{Ox}, \vec{u}$), calculer alors $\frac{d\vec{u}}{d\theta}$ et $\frac{d\vec{v}}{d\theta}$.

Exercice 4

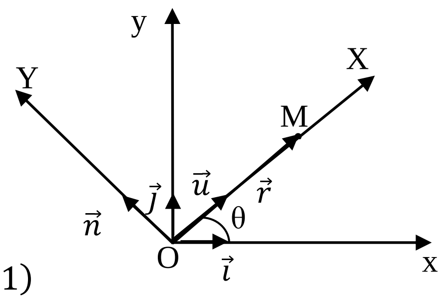
1. Trouver les relations reliant les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques.

2. En déduire les vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_\rho}$, $\overrightarrow{U_\theta}$ et $\overrightarrow{U_z}$ (coordonnées cylindriques) en fonction de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ (coordonnées cartésiennes).

3. Ecrire $\vec{A} = 2x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} - 2z\vec{k}$ en coordonnées cylindriques.

<u>Corrigés des exercices</u>

Exercice 1



On a $|\vec{r}| = r = OM = a\theta$

1- $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = f(\theta, a, \vec{u}, \vec{n}) =?$

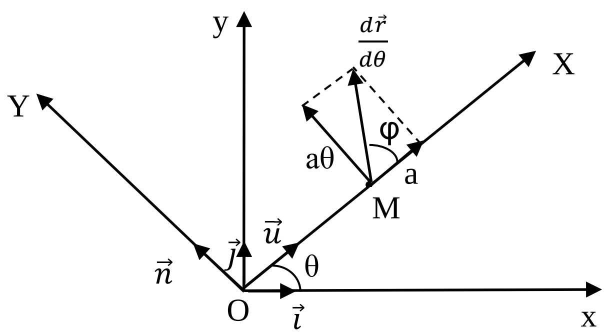
D'aprés le schéma, $\begin{cases} \vec{r} = \overrightarrow{OM} = a\theta\vec{u} \\ \vec{u} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \quad \ldots\ldots (1) \\ \vec{n} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}. \end{cases}$

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\theta a\,\vec{u}) = a\vec{u} + a\theta\frac{d\vec{u}}{d\theta}$$

$$(1) \Longrightarrow \frac{d\vec{u}}{d\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} = \vec{n}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\vec{r}}{d\theta} = a\vec{u} + a\theta\vec{n}$$

2- $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = a\vec{u} + a\theta\vec{n}$ qui a pour origine le point M se présente comme suit :



3- $\left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right| = \sqrt{a^2 + (a\theta)^2} = a\sqrt{1 + \theta^2}$

Exercice 2

A) Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y)

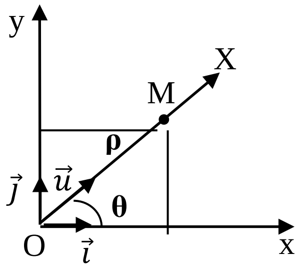
1- Trouver x et y en fonction des coordonnées polaires ρ et θ ??

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$……………………..…………..(1)

D'autre part $\overrightarrow{OM}$ s'écrit par projection comme :

$\overrightarrow{OM} = \rho cos\theta\vec{\imath} + \rho sin\theta\vec{\jmath}$…………………………….(2)

(1) et (2) $\Rightarrow \begin{cases} x = \rho\, cos\theta \\ y = \rho\, sin\theta \end{cases}$

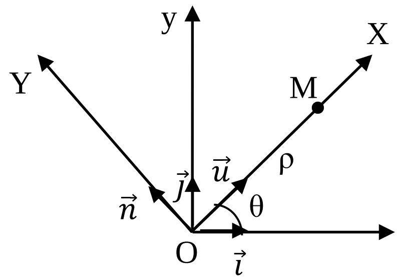


2- Le vecteur unitaire $\vec{u}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{j}$:

On a $\overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}|\vec{u} = \rho\vec{u} = \rho cos\theta\vec{\imath} + \rho sin\theta\vec{j}$

Donc $\vec{u} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{j}$

Et $\vec{n} = \frac{d\vec{u}}{d\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\vec{j}$



$\vec{n}$ et $\vec{u}$ représentent les vecteurs unitaires de la base des coordonnés polaires.

4. Calculer l'expression $d\vec{u}/_{d\theta}$, que représente ce vecteur ?

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \frac{d(cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{j})}{d\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\vec{j} = \vec{n}$$

$\boldsymbol{\frac{d\vec{u}}{d\theta}}$ représente un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}$ dans le sens directe.

B) La position du point M est donnée par $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = t^2\vec{u} \\ \theta = \omega t \end{cases}$ (ω constante)

L'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ en coordonnées polaires est :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(t^2\vec{u})}{dt} = 2t\vec{u} + t^2\frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \vec{n}.\omega$$

$$\boldsymbol{\vec{v} = 2t.\vec{u} + t^2.\omega.\vec{n}}$$

Exercice 3

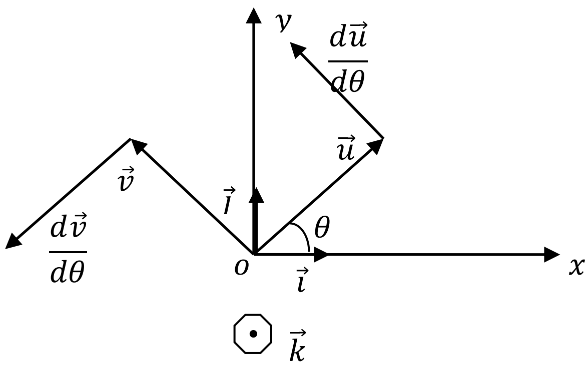
Soient dans un repère orthonormé (Oxyz) deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ perpendiculaires et ayant la même origine de telle sorte que ($\vec{u}, \vec{v}$, Oz) forme un trièdre direct.

Si $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \vec{u})$, calculant alors $\frac{d\vec{u}}{d\theta}$ et $\frac{d\vec{v}}{d\theta}$.

D'après le schéma on a :

$$\begin{cases} \vec{u} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{v} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{d\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} = \vec{v} \\ \dfrac{d\vec{v}}{d\theta} = -cos\theta\vec{\imath} - sin\theta\vec{\jmath} = -\vec{u} \end{cases}$$



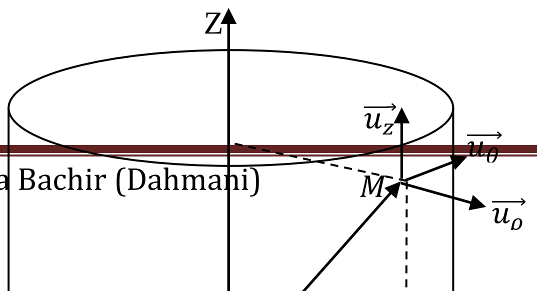
Ainsi la dérivée par rapport à l'angle θ d'un vecteur unitaire, est un vecteur unitaire perpendiculaire directement à ce dernier dans le sens direct.

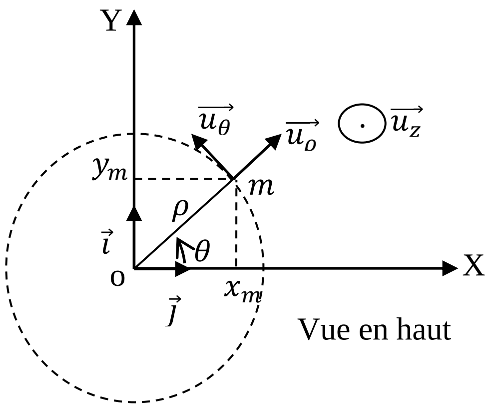
Exercice4

1. <u>Les relations reliant les coordonnées cartésiennes **(x, y, z)** aux **coordonnées cylindriques (ρ, θ, z)**</u> :

Soit $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

m est la projection du point M sur le plan (Oxy).





On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$

$$\overrightarrow{Om} = \left|\overrightarrow{Om}\right|\overrightarrow{u_\rho} = \rho\cos\theta\,\vec{\imath} + \rho\sin\ \theta\,\vec{\jmath}$$

Et

$$\overrightarrow{mM} = \left|\overrightarrow{OZ_M}\right| = z_M\vec{k} = z\vec{k}$$

Donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\cos\theta\,\vec{\imath} + \rho\sin\ \theta\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$

On peut écrire le vecteur position en coordonnées cylindrique par la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\vec{u}_z$$

Les relations qui lient les coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques sont :

$$\begin{cases}\boldsymbol{x = \rho cos\theta} \\ \boldsymbol{y = \rho sin\theta} \\ \boldsymbol{z = z_M}\end{cases}$$

- <u>Les vecteurs unitaires de la base des coordonnées cylindriques</u> :

$\overrightarrow{OM}\Big/_{cylin} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\overrightarrow{u_z}$

$$\overrightarrow{OM}/_{cart} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM}/_{cart} = \rho\ (cos\theta\ \vec{\imath} + sin\ \theta\ \vec{\jmath}) + z\vec{k}$$

Par identification

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\rho} = cos\theta\ \vec{\imath} + sin\ \theta\ \vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_\theta} = \dfrac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta} = -sin\theta\ \vec{\imath} + cos\ \theta\ \vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_z} = \vec{k} \end{cases}$$

<u>Remarque</u> :

On peut écrire les vecteurs unitaires de la base des coordonnées cartésiennes en fonction des vecteurs unitaires de la base des coordonnées cylindrique à partir du tableau ci-dessous:

	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$	$\vec{k}$
$\overrightarrow{u_\rho}$	Cosθ	Sinθ	0
$\overrightarrow{u_\theta}$	-sinθ	Cosθ	0
$\overrightarrow{u_z}$	0	0	1

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\imath} = \cos\theta\overrightarrow{u_\rho} - \sin\theta\ \overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{\jmath} = \sin\theta\overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{k} = \overrightarrow{u_z} \end{cases}$$

Ecrire $\vec{A} = 2x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} - 2z\vec{k}$ en coordonnées cylindriques.

On a $\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z_M \end{cases}$ et $\begin{cases} \vec{\imath} = \cos\theta\overrightarrow{u_\rho} - \sin\theta\ \overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{\jmath} = \sin\theta\overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{k} = \overrightarrow{u_z} \end{cases}$

Donc $\vec{A} = 2x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} - 2z\vec{k}$ s'écrit :

$$\Rightarrow \vec{A} = 2\rho cos\theta\left(\cos\theta\overrightarrow{u_\rho} - \sin\theta\ \overrightarrow{u_\theta}\right) + \rho sin\theta\left(\sin\theta\overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta}\right) - 2z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = (2\rho cos\theta^2 + \rho sin\theta^2)\overrightarrow{u_\rho} + (-2\rho\cos\theta\sin\theta + \rho\ \cos\theta\sin\theta)\overrightarrow{u_\theta} - 2z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \rho(cos\theta^2 + cos\theta^2 + sin\theta^2)\overrightarrow{u_\rho} + \rho\ \cos\theta\ \sin\theta(-2+1)\overrightarrow{u_\theta} - 2z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = (cos\theta^2 + 1)\rho\overrightarrow{u_\rho} - \rho\cos\theta\sin\theta\overrightarrow{u_\theta} - 2z\overrightarrow{u_z}$$