Chapitre I : Analyse dimensionnelle

1. Introduction

L'observation des phénomènes physiques est incomplète si elle n'aboutit pas à des informations quantitatives c'est-à-dire la mesure des grandeurs physiques.

Pour étudier un phénomène physique, il faut étudier les variables importantes, la relation mathématique entre ces variables constitue une loi physique. Cela est possible dans certains cas mais pour d'autre cas il faut utiliser une méthode de modélisation tel que *l'analyse dimensionnelle*

2. Analyse dimensionnelle التحليل البعدي

C'est un outil théorique pour interpréter les problèmes à partir des dimensions des grandeurs physiques mises en jeu: longueur, temps, masse…

L'analyse dimensionnelle permet de :

- Vérifier la validité des équations aux dimensions
- Recherche de la nature des grandeurs physiques
- Recherche de l'homogénéité des lois physiques
- Déterminer l'unité d'une grandeur physique en se basant sur les unités essentielles (mètre, seconde, kilogramme …)

3. Grandeurs physiques

La valeur d'une grandeur physique est mesurable c'est-à-dire elle peut augmenter ou diminuer comme : Longueur, temps, masse, qui constituent les grandeurs fondamentales en Mécanique, les autres grandeurs physiques s'écrivent en fonction de ces trois grandeurs comme la vitesse, l'accélération, la force ….

4. Unités الوحدات

La valeur d'une grandeur physique est donnée en fonction d'un étalon appelé « Unité », les unités des grandeurs physiques s'écrivent en fonction de celle des grandeurs fondamentales.

Grandeurs fondamentales	Symboles	Dimensions	Unités (dans le système international)
Longueur	l	$[l] = L$	Mètre (m)
Masse	m	$[m] = M$	Kilogramme (kg)
Temps	T	$[t] = T$	Seconde (s)
Intensité	i	$[i] = I$	Ampère (A)

Il y a des unités particulières comme N (Newton) pour la force, Hz (Hertz) pour la fréquence, Watt pour la puissance, Pascal pour la pression…

Il y a deux types d'unités :

- Système international SI MKSA (mètre, kilogramme, seconde, ampère), c'est le système le plus utilisé
- Système CGSA (centimètre, gramme, seconde, ampère),, il est moins utilisé

5. Equations aux dimensions

En désignant par M,L et T les dimensions des grandeurs fondamentales masse, longueur et temps, on peut exprimer les dimensions des autres grandeurs dérivées en fonction de ces trois dernières. Les équations ainsi obtenues sont les équations aux dimensions de ces grandeurs

Exemple :

$[\text{vitesse}] = [v] = \frac{[\text{longueur}]}{[\text{temps}]} = \frac{[l]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1}$ et l'unité est m/s

$[\text{accélération}] = [a] = \frac{[\text{vitesse}]}{[\text{temps}]} = \frac{[v]}{[t]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$ et l'unité est m/s^2

$[\text{Force}] = [F] = [\text{masse}][\text{accélération}] = [m][a] = MLT^{-2}$ et l'unité est Newton (kgm/s^2)

6. Homogénéité des équations aux dimensions

Les deux membres d'une équation aux dimensions doivent avoir les mêmes dimensions puisqu'ils représentent des grandeurs de même nature.

$G = A \pm B \Rightarrow [G] = [A] = [B]$

$G = A * B \Rightarrow [G] = [A] * [B]$

$G = A/B \Rightarrow [G] = [A]/[B]$

$G = A^n \Rightarrow [G] = [A]^n$

Exemple :

$$y = \frac{1}{2}\ at^2 + v_0 t + y_0$$

Vérifions que

$$[y] = \left[\frac{1}{2}\ at^2\right] = [v_0 t] = [y_0]$$

Nous avons

$[y] = [y_0] = L,$ $\left[\frac{1}{2}\ at^2\right] = \left[\frac{1}{2}\ \right][a][t]^2 = 1\ LT^{-2}T^2 = L$, $[v_0 t] = [v_0][t] = LT^{-1}T = L$

Donc

$[y] = \left[\frac{1}{2}\ at^2\right] = [v_0 t] = [y_0]$ est vérifiée

Remarques

Les constantes n'ont pas de dimensions

$[\text{Chiffre}] = 1$ et $[\text{angle}] = 1$ et $[cos\ \alpha] = [sin\ \alpha] = [tg\ \alpha] = [cotg\ \alpha] = [\ln x] = [e^x] = 1$

Exemple : cherchons la dimension de $I=I_0 \exp(\omega t+\varphi)$

Avec ω :vitesse angulaire, $\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow [\omega] = \frac{[\theta]}{[t]} = T^{-1}$ donc $[\omega t] = [\omega][t] = T^{-1}T = 1$

$[\varphi] = 1$ donc $[\omega t + \varphi] = [\omega t] = [\varphi] = 1$ et $[exp\,(\omega t + \varphi)] = 1$ et $[I]=[I_0]$

Les équations aux dimensions non homogènes sont fausses

On peut utiliser cette propriété des équations aux dimensions pour trouver des lois physiques en connaissant les variables qui agissent dans le phénomène physique en question et la relation entre eux

Exemple :

La période est donnée en fonction d'une longueur et d'une gravité par la relation suivante

$T=k\, l^x g^y$ donner la loi donnant la période

Pour cela il faut déterminer x et y

On suppose que l'équation est homogène donc

$$[T] = [k][l]^x[g]^y$$

$[l] = L, [k] = 1,$ T est un temps $[T] = T$ *et* g est une accélération donc $[g] = LT^{-2}$

$T=1 . L^x(LT^{-2})^y \Rightarrow M^0L^0T = L^{x+y}T^{-2y}$

Par identification $\begin{cases} x + y = 0 \\ -2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = -y = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $T = k\, l^{\frac{1}{2}}\, g^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$

Exemple

La vitesse moyenne des particules qui s'écrit en fonction de la masse m et de volume V et la pression p v=f(m, V, p)

$v = km^{\alpha}V^{\beta}p^{\gamma}$

On suppose que l'équation est homogène donc $[v] = k[m]^{\alpha}[V]^{\beta}[p]^{\gamma}$ (1)

$$[m] = M, [v] = LT^{-1}, [V] = L^3, [p] = \frac{[F]}{[s]} = \frac{[m][a]}{[s]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

(1)$\Rightarrow M^0LT^{-1} = M^{\alpha}L^{3\beta}(ML^{-1}T^{-2})^{\gamma}$

$$\Rightarrow M^0LT^{-1} = M^{\alpha+\gamma}L^{3\beta-\gamma}T^{-2\gamma}$$

Par identification on aura

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 3\beta - \gamma = 1 \\ -2\gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = \dfrac{1}{2} \\ \alpha = -\gamma = -\dfrac{1}{2} \\ \beta = \dfrac{1+\gamma}{3} = \dfrac{1+1/2}{3} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $v = km^{-\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v = k\sqrt{\frac{pV}{m}}$

TD n° 1 de Mécanique

Analyse dimensionnelles et calcul d'incertitudes

Exercice 1

Compléter le tableau suivant :

Grandeur physique	Symbole de la grandeur	Formule utilisée	Dimension	Unité (SI)
Surface				
Volume				
Masse volumique				
Fréquence				
Vitesse linéaire				
Vitesse angulaire				
Accélération linéaire				
Accélération angulaire				
Force				
Travail				
Energie				
Puissance				
Pression				

Exercice 2

L'équation caractéristique d'un fluide à température constante est de la forme suivante :

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = c$$

Ou **p** est la pression et **V** est le volume.

Déterminer les dimensions des grandeurs a, b et c.

Exercice3

1- La trajectoire ***y=f(x)*** d'un projectile lâché avec une vitesse initiale $(\boldsymbol{v_0})$ à partir d'un point (o) situé à une hauteur ($\boldsymbol{h}$) du plan d'impact, est donnée par la formule suivante :

$$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2 + h$$

Démontrez que cette formule est homogène

2- Deux masses ponctuelles **m** et **m'** s'attirent suivant la loi d'attraction de Newton,

$$\vec{F} = -G\frac{m.m'}{r^2}\,\vec{u}$$

G est une constante de gravitation.

Quelle est la dimension de G ? En déduire son unité dans le système international (MKSA).

Exercice 4

Dans un fluide, une bille de rayon **r** animée d'une vitesse *v*, est soumise à une force de frottement donnée par $F = 6\pi\eta\, rv$, où η est la viscosité du fluide.

1- Quelle est la dimension de η ?

2- Lorsque la bille est lâchée sans vitesse initiale à l'instant t = 0, sa vitesse s'écrit pour t > 0:

$$v = a\left(1 - exp\left(-\frac{t}{b}\right)\right)$$

Où a et b sont deux grandeurs qui dépendent des caractéristiques du fluide. Quelles sont les dimensions de a et b ?

Exercice 5

A) Une particule de masse **m** enfermée dans une boite cubique de coté **L**, à une énergie cinétique **E** telle que :

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\pi^2\sigma^2}}{\boldsymbol{2mV^{\frac{2}{3}}}}\boldsymbol{n^2}$$

Ou **V** le volume de la boite et **n** un nombre sans dimension.

En utilisant les équations aux dimensions, trouver la dimension de $\boldsymbol{\sigma}$.

B) La quantité de mouvement P (P = Mϑ^2 avec ϑ est une vitesse) associée à un photon dépend de sa fréquence **f** selon l'expression suivante :

$$\boldsymbol{P = \sigma^{\alpha} f^{\beta} c^{\gamma}}$$

Ou **c** est une vitesse de la lumière.

En utilisant l'analyse dimensionnelle, trouver les exposants $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ **et** $\boldsymbol{\gamma}$.

<u>Exercice 6</u>

Soit un pendule simple constitué d'une masse (m) accrochée à l'extrémité mobile d'un fil de longueur (l). On travaille dans le référentiel terrestre où le champ de pesanteur est g.

Montrer, par une analyse dimensionnelle, que la période des petites oscillations de ce pendule peut s'écrit :

$$T = f(l, m, g) = k\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Où k est une constante sans dimension.

Exercice 7

L'expérience a montré que la vitesse v du son dans un gaz n'est fonction que de la masse volumique du gaz ρ et de son coefficient de compressibilité χ.

Elle est donnée par $= k\rho^{x}\chi^{y}$. On rappelle que χ est homogène à l'inverse d'une pression; k est une constante sans dimension.

Déterminer la relation de la vitesse du son v.

Corrigés des exercices

Exercice 1

- La surface :

On à [l]=L, [t]=T et [m]=M.

$S = l \times l$ $\Longrightarrow$ [S]=L.L=L^2 $\Longrightarrow$ [S]=L^2 l'unité est (m^2)

- Le volume :

V=l×l×l $\Longrightarrow$ [V]=L.L.L=L^3 $\Longrightarrow$ [V]=L^3 l'unité est (m^3)

- La masse volumique :

$\rho = \frac{m}{V}$ donc $[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{M}{L^3} = ML^{-3} \Longrightarrow$ [ρ]=M/L^3 l'unité est (kg/m^3)

- La fréquence :

$f = \frac{1}{T} \Longrightarrow [f] = \frac{1}{[T]} = \frac{1}{T} = T^{-1}$ $\Longrightarrow$ [f]=T^{-1} l'unité est (1/s ou Hertz)

- La vitesse linéaire :

$v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow [v] = \frac{[x]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1}$ $\Longrightarrow$ $[v] = LT^{-1}$ l'unité est (m/s)

- La vitesse angulaire :

$\omega = \theta^{\cdot} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R} \Longrightarrow [\omega] = \frac{[\theta]}{[t]} = \frac{1}{T} = T^{-1}$ $\Longrightarrow$ [ω]=T^{-1} l'unité est (Rd/s)

- L'accélération linéaire :

$a = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow [a] = \frac{[dv]}{[dt]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2} \Longrightarrow [a] = LT^{-2}$ l'unité est (m/s^2)

- L'accélération angulaire :

$\omega^{\cdot} = \theta^{\cdot\cdot} = \frac{d\theta^{\cdot}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \Longrightarrow [\omega^{\cdot}] = \frac{[d\theta^{\cdot}]}{[dt]} = \frac{T^{-1}}{T} = T^{-2} \Longrightarrow$ [ω·]=T^{-2} l'unité est (Rd/s^2)

- La force :

F = m×a $\Longrightarrow$ [F]=[m]×[a]=M.L.T^{-2} $\Longrightarrow$ [F]=MLT^{-2} l'unité est (kg.m/s^2 ou Newton)

- Le travail :

$W = F\times d \Longrightarrow [W]=[F]\times[d]=MLT^{-2}.L=ML^2T^{-2}$ l'unité est ($kg.m^2/s^2$ ou Joule)

- L'énergie :

$E_C = (½).m.\ v^2 \Longrightarrow [E]=[1/2].[m].[v]^2 = ML^2T^{-2}$ l'unité est le Joule

Ou $E_p = m.g.h \Longrightarrow [E]= [m].[g].[h]= MLT^{-2}L= ML^2T^{-2}$ l'unité est le Joule

- La puissance :

$P = W/t \Longrightarrow [P]=[W]/[t]=(ML^2T^{-2})/T=ML^2T^{-3}$ l'unité est ($kg.m^2/s^3$ ou Watt)

- La pression :

$P = F/S \Longrightarrow [P] = [F]/[S]=(MLT^{-2})/L^2=ML^{-1}T^{-2}$ l'unité est ($kg./m.s^2$ ou Pascal).

Résumé :

Grandeur physique	Symbole de la grandeur	Formule utilisée	Dimension	Unité (SI)
Surface	S	l×l	L^2	m^2
Volume	V	l×l×l	L^3	m^3
Masse volumique	ρ	m/V	ML^{-3}	Kg/m^3
Fréquence	F	1/T	T^{-1}	1/s ou hertz
Vitesse linéaire	v	dx/dt	LT^{-1}	m/s
Vitesse angulaire	ω	dθ/dt	T^{-1}	Rd/s
Accélération linéaire	a	dv/dt	LT^{-2}	m/s^2
Accélération angulaire	$\omega^{\cdot}$	$d\theta^{\cdot}/dt$	T^{-2}	Rd/s^2
Force	F	m.a	MLT^{-2}	Newton
Travail	W	F.d	$ML^2\ T^{-2}$	Joule

Energie	E	(½)mv^2	ML^2T^{-2}	Joule
Puissance	P	W/t	ML^2T^{-3}	Watt
Pression	$\mathcal{P}$	F/S	$ML^{-1}T^{-2}$	Pascal

Exercice 2

On a $\left(P + \frac{a}{V^2}\right) \times (V - b) = C$

[b] = [V] = L^3

$[\frac{a}{V^2}]$ = [P] ⟹ [a] = [P]×$[V]^2$ = $M.L^{-1}T^{-2}L^6$ = $M.L.^5T^{-2}$

Et [C]=[P]×[V]=$ML^{-1}T^{-2}L^3$=ML^2T^{-2}

Exercice 3

On a $y = \frac{g}{2v_0^2}x^2 + h$ ……(*)

1- Démontrez que cette équation est homogène :

L'équation (*) est homogène si : $[y] = \left[\frac{g}{2v_0^2}x^2\right] = [h]$

Sachant que $\begin{cases} [g] = LT^{-2} \\ [v_0] = LT^{-1} \\ [x] = L \\ [h] = [y] = L \end{cases}$

On a $[y] = [h]$=L donc il suffit de vérifier que $\left[\frac{g}{2v_0^2}x^2\right] = L$

$$\Rightarrow \left[\frac{g}{2v_0^2}x^2\right] = \frac{[g].[x]^2}{[2][v_0]^2} = \frac{LT^{-2}L^2}{L^2T^{-2}} = L$$

Donc l'équation (*) est homogène.

2- $\vec{F} = -G\frac{m.m'}{r^2}\vec{u}$ quel est la dimension de G ?

$$\|\vec{F}\| = F = G\frac{m.m'}{r^2} \implies [F] = [G].\frac{[m].[m']}{[r]^2}$$

$$\implies [G] = [F].\frac{[r]^2}{[m].[m']} = MLT^{-2}\frac{L^2}{M.M} = L^3M^{-1}T^{-2}$$

[G]= $L^3M^{-1}T^{-2}$, l'unité de G sera $m^3/kg.s^2$ ou $N.m^2/kg^2$.

Exercice 4

On a $F = 6\pi\eta r v$

1- $[\eta]$ =?

$$F = 6\pi\eta r v \implies \eta = \frac{F}{6\pi r v}$$

$[\eta] = \frac{[F]}{[r][v]}$ avec $\begin{cases} [r] = L \\ [F] = MLT^{-2} \\ [v] = LT^{-1} \end{cases}$

D'où

$$[\eta] = \frac{MLT^{-2}}{L.LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

2- On a $v = a\left(1 - exp\left(-\frac{t}{b}\right)\right)$

Cherchons les dimensions[a] et [b]

L'argument de l'exponentielle est sans dimension donc :

$$[-\frac{t}{b}]=1 \Rightarrow [-t] = [t] = [b] \; nous \; avons \; [-1] = 1$$

[b] = T et v = a . (1- $e^{-t/b}$), $[1 - e^{-t/b}]$=1

donc $[v] = LT^{-1} = [a]$

$$\Rightarrow [a]=LT^{-1}$$

Exercice 5

A) $$E = \frac{\pi^2\sigma^2}{2mV^{\frac{2}{3}}}n^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{2mEV^{\frac{2}{3}}}{n^2\pi^2} \Rightarrow [\sigma]^2 = \frac{[2][m][E][V]^{\frac{2}{3}}}{[n]^2[\pi]^2}$$

$$\begin{cases} [E] = M.L^2.T^{-2} \\ [m] = M \\ [n] = [2] = [\pi] = 1 \\ [V] = L^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\sigma]^2 = \frac{M^2.L^2.T^{-2}.L^2}{1}$$

$$\Rightarrow [\sigma]^2 = M^2.L^4.T^{-2} \Rightarrow [\sigma] = M.L^2.T^{-1}$$

La dimension de $\boldsymbol{\sigma}$ est $\boldsymbol{M.L^2.T^{-1}}$.

B) La quantité de mouvement P est donnée par l'expression suivante :

$$P = \sigma^\alpha f^\beta c^\gamma$$

$$Cette\ relation\ est\ homogène\ donc\ [P] = [\sigma]^\alpha[f]^\beta[c]^\gamma$$

$$P = mv^2 \Rightarrow [P] = M.L^2.T^{-2}$$

$$\begin{cases} [v] = [c] = L.T^{-1} \\ [f] = T^{-1} \\ [P] = M.L^2.T^{-2} \\ [\sigma] = M.L^2.T^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow [P] = [\sigma]^\alpha[f]^\beta[c]^\gamma = (M.L^2.T^{-1})^\alpha(T^{-1})^\beta\left(L\ .T^{-1}\right)^\gamma$$

$$\Rightarrow [P] = M^1L^2T^{-2} = M^\alpha L^{2\alpha+\gamma}T^{-\alpha-\beta-\gamma}$$

$$Par\ identification$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\alpha + \gamma = 2 \\ -(\alpha+\beta+\gamma) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P = \sigma.f}$$

Exercice 6

Montrer, par une analyse dimensionnelle, que la période des petites oscillations de ce pendule peut s'écrit :

$$T = f(l, m, g) = k\sqrt{\frac{l}{g}}$$

On a T = f(m, g, l) donc $T = k.m^{\alpha} g^{\beta} l^{\gamma}$.

Cette loi est homogène D'où $[T] = [k][m]^{\alpha}[g]^{\beta}[l]^{\gamma}$

Avec $\begin{cases} [m] = M \\ [l] = L \quad et \;\; [k] = 1 \\ [g] = LT^{-2} \end{cases}$

Donc $[T] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{-2\beta} L^{\gamma} = T^{1}$

$$\Rightarrow M^{\alpha} L^{\beta+\gamma} T^{-2\beta} = M^{0} L^{0} T^{1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -2\beta = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 1/2 \\ \beta = -1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Exercice 7

On a $v = k\rho^{x}\chi^{y}$ donc $[v] = [k][\rho]^{x}[\chi]^{y}$.

$$\text{avec} \quad \begin{cases} [v] = LT^{-1} \\ [k] = 1 \\ [\rho] = ML^{-3} \\ [\chi] = \frac{1}{[p]} = M^{-1}LT^{+2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow [v] = LT^{-1} = (ML^{-3})^x(M^{-1}LT^2)^y$$

$$\Rightarrow M^0LT^{-1} = M^xL^{-3x} \quad M^{-1y}L^yT^{2y}$$

$$\Rightarrow M^0LT^{-1} = M^{x-y}L^{-3x+y} \quad T^{2y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -3x + y = 1 \\ 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = -\frac{1}{2} \\ y = -1/2 \end{cases} \Rightarrow v = k\rho^{-1/2}\chi^{-1/2} = \frac{k}{\sqrt{\rho\chi}}$$

Alors

$$v = \frac{k}{\sqrt{\rho\chi}}$$