Chapitre III : Cinématique du point matériel

1. Introduction :

La cinématique est l'étude des mouvements sans se préoccuper des causes responsables de ces mouvements (comme les forces par exemple…)

Le point matériel est tout corps matériel dont les dimensions sont théoriquement nulles et pratiquement négligeables par rapport à la distance parcourue.

L'état de mouvement ou de repos d'un corps sont deux notions essentiellement relatives : par exemple une montagne est au repos par rapport à la terre mais en mouvement par rapport à un observateur qui regarde la terre de loin et pour lequel le globe terrestre (avec tout ce qu'il renferme) est en perpétuel mouvement.

2. Système de références :

La notion de mouvement est relative. Un corps peut être à la fois en mouvement par rapport à un objet et au repos par rapport à un autre, d'où la nécessité du choix du référentiel. C'est un système d'axes de coordonnées lié à un observateur

Cette étude du mouvement s'effectue selon l'une des deux formes :

- **vectorielle :** en utilisant les vecteurs : position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{a}$.
- **algébrique** : en définissant l'équation du mouvement suivant une trajectoire donnée.

3. Position, équation horaire

On définit la position d'un point matériel M dans un référentiel par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$

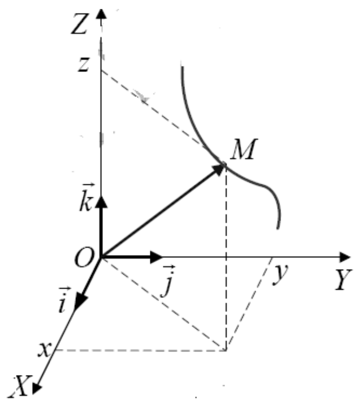
Avec O est un point fixe et les composantes du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont donnés dans la base de système de coordonnées choisit (coordonnées cartésiennes, coordonnées polaires…)

Le point M se déplace dans le temps, ce mouvement est donnée par une équation appelée *équation horaire* .

4. Trajectoire :

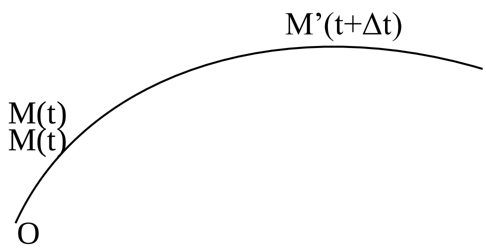
C'est la courbe décrite par un point mobile dans le référentiel considéré [2]

La position d'un point matériel *M* repéré par ses coordonnées (x,y,z)au temps *t* dans un repère R(O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) par un vecteur position $\overrightarrow{OM}$



5. Vecteur vitesse

On considère un mobile qui se trouve à l'instant t à la position M(t) et il évolue au point M'(t+Δt) à l'instant t+Δt



On appelle vitesse moyenne entre les deux instants t et t+Δt,

$$\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{(t+\Delta t)-t} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

Si le temps Δt est très petit $(\Delta t \to 0)$ On parle alors de la vitesse instantanée.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{v_{moy}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \Delta\overrightarrow{OM}$$

Donc

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

6. Vecteur accélération

Lorsque la vitesse varie dans le temps *v=f(t)*, le point M est soumis à une accélération

L'accélération moyenne s'écrit

$$\overrightarrow{a_{moy}} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t}$$

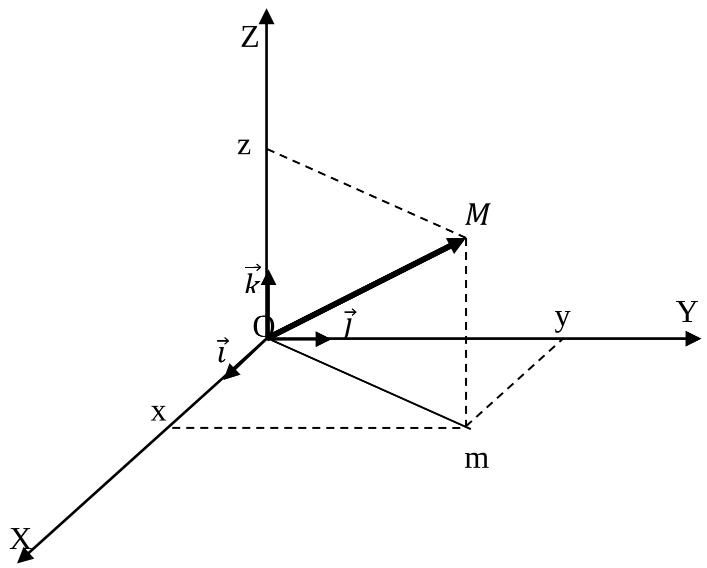
Lorsque le temps est très petit $(\Delta t \longrightarrow 0)$, l'accélération instantanée s'écrit alors

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{a}} = \frac{\boldsymbol{d\vec{v}(t)}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{d^2\overrightarrow{OM}}}{\boldsymbol{dt^2}}$$

7.Expression de la vitesse et de l'accélération dans les différents systèmes de coordonnées

7.1. Coordonnées cartésiennes

Soit le point M dans l'espace, il est repéré par ses coordonnées (x,y,z) dans le repère orthonormé (Oxyz)de vecteurs unitaires $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$



Le vecteur position s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

La vitesse dans ce cas s'écrit :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

Le module de la vitesse s'écrit

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

L'accélération s'écrit

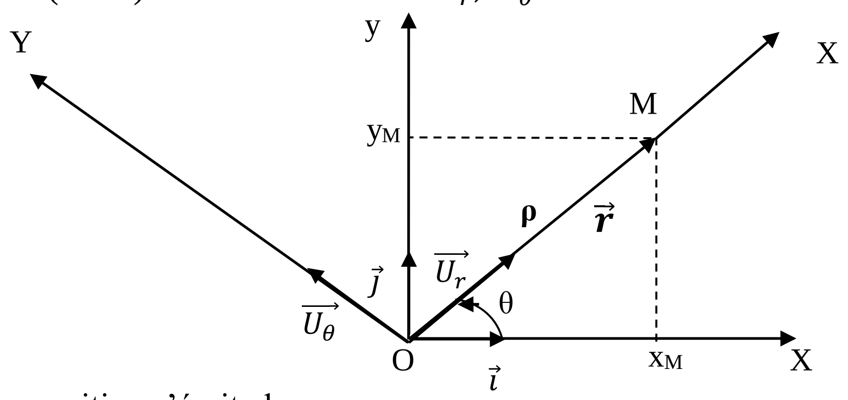
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

Le module de l'accélération s'écrit

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

7.2. Coordonnées polaires

Soit le point M dans l'espace, il est repéré par ses coordonnées (ρ,θ) dans le repère orthonormé (OXY)de vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r},\ \overrightarrow{u_\theta}$



Le vecteur position s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{U}_r$$

La vitesse dans ce cas s'écrit :

$$\boldsymbol{\vec{v}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{U}_r + \rho\ \frac{d\vec{U}_r}{dt}$$

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \frac{d\vec{U}_r}{dt}\frac{d\theta}{d\theta} = \frac{d\vec{U}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

Avec $\frac{d\vec{U}_r}{d\theta} = \vec{U}_\theta$ donc $\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{U}_r + \rho\ \frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{\boldsymbol{v}} = \rho^{\cdot}\vec{U}_r + \rho\ \theta^{\cdot}\vec{U}_\theta$$

Avec $\rho^{\cdot} = \frac{d\rho}{dt}\ \ et\ \theta^{\cdot} = \frac{d\theta}{dt}$

L'accélération s'écrit

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{U}_r + \frac{d\rho}{dt}\ \frac{d\vec{U}_r}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta + \rho\ \frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{U}_\theta + \rho\ \frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{U}_\theta}{dt}$$

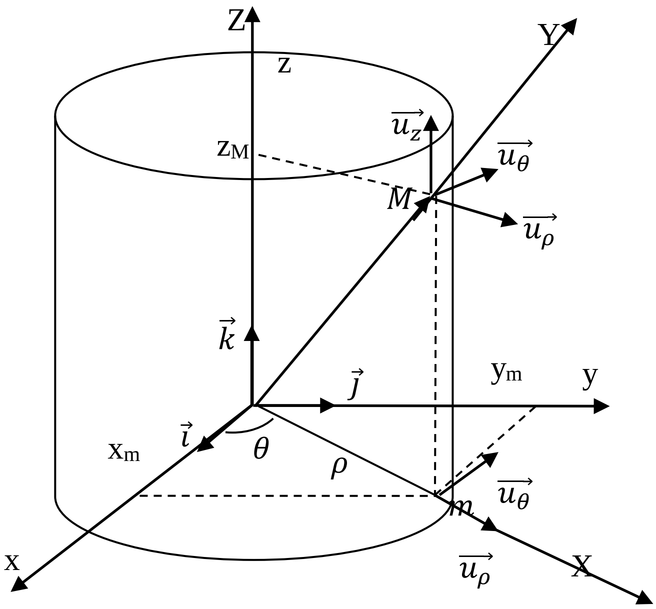
$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{U}_r + \frac{d\rho}{dt}\ \frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta + \rho\ \frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{U}_\theta - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{U}_r$$

Avec $\frac{d\vec{U}_r}{d\theta} = \vec{U}_\theta\ et\ \frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta} = -\vec{U}_r$

Donc $\vec{a} = \rho^{\cdot\cdot}\vec{U}_r + 2\rho^{\cdot}\ \theta^{\cdot}\vec{U}_\theta + \rho\ \theta^{\cdot\cdot}\vec{U}_\theta - \rho\ (\theta^{\cdot})^2\vec{U}_r$

7.3. Coordonnées Cylindriques

Soit le point M dans l'espace, il est repéré par ses coordonnées (ρ,θ,z) dans le repère orthonormé (OXYZ)de vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_\rho},\ \overrightarrow{u_\theta},\ \overrightarrow{u_z}$



Le vecteur position s'écrit alors :

$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{U}_\rho + z\overrightarrow{U_z}$

La vitesse dans ce cas s'écrit :

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{U}_r + \rho\ \frac{d\vec{U}_r}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{U}_z + z\ \frac{d\vec{U}_z}{dt}$$

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \frac{d\vec{U}_r}{dt}\ \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{d\vec{U}_r}{d\theta}\ \frac{d\theta}{dt}$$

Avec $\frac{d\vec{U}_r}{d\theta} = \vec{U}_\theta$ donc $\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta$ et $\frac{d\vec{U}_z}{dt} = \vec{O}$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{U}_r + \rho\ \frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{U}_z$$

$$\Rightarrow \vec{\boldsymbol{v}} = \rho^{\cdot}\vec{U}_r + \rho\ \theta^{\cdot}\vec{U}_\theta + z^{\cdot}\overrightarrow{U_z}$$

Avec $\rho^{\cdot} = \frac{d\rho}{dt}$, $\theta^{\cdot} = \frac{d\theta}{dt}$ et $z^{\cdot} = \frac{dz}{dt}$

L'accélération s'écrit

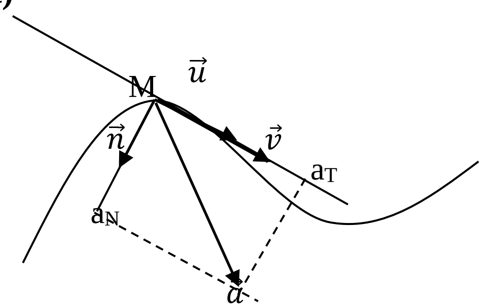
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{U}_r + \frac{d\rho}{dt}\ \frac{d\vec{U}_r}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta + \rho\ \frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{U}_\theta + \rho\ \frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{U}_z +$
$\frac{dz}{dt}\frac{d\vec{U}_z}{dt}$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{U}_r + \frac{d\rho}{dt}\ \frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta + \rho\ \frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{U}_\theta - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{U}_r + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{U}_z$$

Avec $\frac{d\vec{U}_r}{d\theta} = \vec{U}_\theta$, $\frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta} = -\vec{U}_r$ et $\frac{d\vec{U}_z}{dt} = \vec{O}$

Donc $\vec{a} = \rho^{\cdot\cdot}\vec{U}_r + 2\rho^{\cdot}\ \theta^{\cdot}\vec{U}_\theta + \rho\ \theta^{\cdot\cdot}\vec{U}_\theta - \rho\ (\theta^{\cdot})^2\vec{U}_r + z^{\cdot\cdot}\overrightarrow{U_z}$

7.4. Coordonnées intrinsèques (repère de Fresnet)



On étudie le mouvement dans le repère de Fresnet.

On avait l'habitude de travailler dans un repère fixe mais dans ce cas, on étudie le mouvement dans un repère mobile qui se déplace avec le point mobile « M », ce repère est le repère de fresnet.

$\vec{u}$ est le vecteur unitaire suivant la tangente à la trajectoire

$\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la trajectoire et perpendiculaire à $\vec{u}$ et dirigé vers le centre de la courbure

Le repère de Fresnet est un repère à deux dimensions, dans ce repère :

-La position ne change pas(le repère se déplace avec le point M)

-Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire, il s'écrit : $\vec{v} = |\vec{v}|\vec{u}$

-Le vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d|\vec{v}|\vec{u}}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{u} + |\vec{v}|\frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\theta} X \frac{d\theta}{dt} = \vec{n} X \omega \quad ; \qquad avec\ \vec{n} = \frac{d\vec{u}}{d\theta}\ et\ \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Le vecteur accélération s'écrit dans le repère

$\vec{a} = a_T\vec{u} + a_N\vec{n}$

Donc : $\vec{a} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{u} + |\vec{v}| X\, \vec{n}\, X\omega$

$\omega = \frac{v}{\sigma}$ avec σ le rayon de la courbure de la trajectoire

Donc $\vec{a} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{u} + \frac{v^2}{\sigma}\vec{n}$

Les accélérations normale et tangentielle s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} a_T = \dfrac{d|\vec{v}|}{dt} \\ a_N = \dfrac{v^2}{\sigma} \end{cases}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_N^2 + a_T^2}$$

$\sigma \to \infty$la trajectoire est une droite

σ est constante, donc la trajectoire est circulaire

8. Etude de quelques mouvements :

8.1. Mouvement rectiligne

La trajectoire est une droite. On choisit un point O comme origine sur la trajectoire et un vecteur unitaire $\vec{\imath}$. La position du mobile M, en fonction du temps, est repérée par son abscisse

$x(t) = \overline{OM(t)}$.

Le vecteur position $\overrightarrow{r(t)} = \overrightarrow{OM(t)} = x(t)\vec{\imath}$

8.1.1 Mouvement rectiligne uniforme

C'est un mouvement avec une accélération nulle $\overrightarrow{a(t)} = \vec{0}$ et la vitesse est constante

Les conditions initiales à t=0 ; $x=x_0$

La vitesse

$$a = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a d\,t = [cte]_0^t$$

Donc $\boldsymbol{v=v_0=cte}$

La position

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_0 d\,t = [v_0 t]_0^t = v_0 t$$

Donc $\boldsymbol{x=v_0\, t+x_0}$

8.1.2. Mouvement rectiligne uniformément varié

C'est un mouvement avec accélération constante

Les conditions initiales à t=0 ; $v=v_0$ et $x=x_0$

La vitesse

$$a = \frac{dv}{dt} = a_0 \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a_0 d\,t = [a_0 t]_0^t$$

Donc $\boldsymbol{v=a_0t+v_0}$

La position

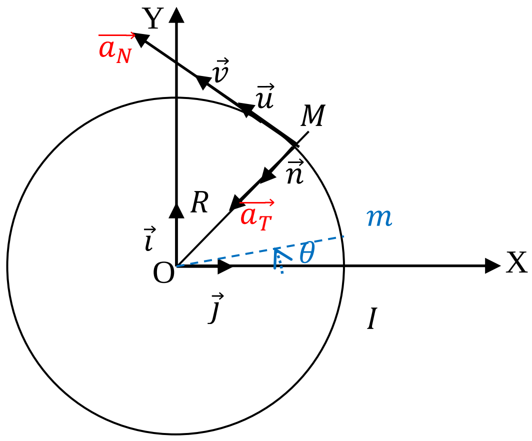
$$v = \frac{dx}{dt} = a_0 t + v_0 \quad \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (a_0 t + v_0) d\,t = \left[\frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t\right]_0^t$$

Donc $\boldsymbol{x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0}$

8.2 Mouvement circulaire

La trajectoire est circulaire

Position



Le point mobile se déplace du point I au point M, donc la trajectoire est un arc $\widehat{IM}$

En considérant un déplacement élémentaire du point mobile du point I au point m, on aurait un déplacement sous forme d'un arc élémentaire Im

Dans le triangle droit OIm, $\widehat{Im}$=R sinθ

θ est tellement petite alors $sin\ \theta \approx \theta$

alors $\boldsymbol{\widehat{Im}=R\theta}$

Vitesse

$$v = \frac{d\widehat{Im}}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

R est constant, la vitesse est suivant la trajectoire, donc elle s'écrit $\vec{v} = v\vec{u}$ donc le vecteur $\vec{u}$ serait suivant la tangente

$\boldsymbol{\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega}$ ***est la vitesse angulaire***

$$v = R\frac{d\theta}{dt} = R\boldsymbol{\dot{\theta}} = \boldsymbol{R\omega}$$

La relation entre la vitesse linéaire et la vitesse angulaire est

$$v = \boldsymbol{R\omega}$$

Accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u} + v\ \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\ avec\ \frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{n}$ (avec $(\vec{u}, \vec{n})$ les vecteurs unitaires dans le repère de Fresnet et $\frac{d\theta}{dt} = \omega$)

8.2.1 Mouvement circulaire uniforme

Dans ce cas la vitesse angulaire ω est constante et donc la vitesse v est constante, alors $a_T = 0$.

L'accélération dans ce cas est $\vec{a} = \frac{v^2}{R}\ \vec{n}$

8.2.2 Mouvement circulaire uniformément variable

Dans ce cas la vitesse angulaire ω n'est pas constante et donc la vitesse v n'est pas constante aussi, alors $\vec{a} = a_T\vec{u} + a_N\vec{n}$.

L'accélération dans ce cas est $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u} + \frac{v^2}{R}\ \vec{n}$

9. Mouvement sinusoïdal ou harmonique

Le mouvement est dit sinusoïdal ou harmonique si son évolution au cours du temps est d

écrite par l'équation

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

A : l'amplitude et ω : la pulsation

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

T : la période et f : la fréquence et φ: la phase

La vitesse

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega\cos\ (\omega t + \varphi)$$

L'accélération

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\ \omega^2\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\ \omega^2\ x(t)$$

TD N° 3 de Mécanique

Cinématique D'un Point Matériel

Exercice 1

Un corps se déplace sur l'axe des x selon la relation $x(t)=2t^3+5t^2+5$

a- Etablir la vitesse $v(t)$ et l'accélération $a(t)$ à chaque instant t
b- Calculer la position du corps, sa vitesse et son accélération instantanée pour $t_1=2s$ et $t_2=3s$
c- Déduire la vitesse et l'accélération moyenne du corps entre $t_1$et t_2

Exercice 2

Les coordonnées x et y d'un point mobile M dans le plan (Oxy) varient avec le temps t selon les relations suivantes : $x=t+1$ et $y=(t^2 /2)+2$

Trouver :

a- L'équation de la trajectoire
b- Les composantes de la vitesse et de l'accélération et leurs modules.
c- Les accélérations: normale a_N et tangentielle a_T et en déduire le rayon de courbure
d- La nature du mouvement

Exercice 3

Une particule se déplace sur une trajectoire dont l'équation de la trajectoire est $y=x^2$ de telle sorte qu'à chaque instant $v_x=v_0=cst$. Si t=0, $x_0=0$.

Déterminer :

a- Les coordonnées x(t) et y(t) de la particule.
b- La vitesse et l'accélération de la particule.
c- Les accélérations normale et tangentielle ainsi que le rayon de courbure.

Exercice 4

Un corps dont le mouvement est défini par les composantes de la vitesse suivantes

$v_x=1$ $\qquad$ $v_y=2/(t+1)$

Sachant qu'à $t=0$ $x=0$ et $y=2$

a- Quelle est l'équation de la trajectoire $y=f(x)$
b- Calculer les composantes de l'accélération

Exercice 5

Le mouvement d'un corps est définit par les composants de la vitesse suivantes :

$$\begin{cases} v_x = R\omega\cos(\omega t) \\ v_y = R\omega\sin(\omega t) \end{cases}$$

Sachant que ω est constante et à t=0, le mobile se trouve à l'origine O (0,0),
Déterminer :

1. les composantes du vecteur accélération et son module.
2. Les composantes tangentielle et normale de l'accélération et déduire Le rayon de courbure.
3. Les composantes du vecteur position et déduire l'équation de la trajectoire.
4. Quelle est la nature du mouvement?

<u>Exercice 6</u>

Un point matériel M se déplace sur l'axe OX avec une accélération $\vec{a} = a\,\vec{\imath}$ avec a > 0.

1-Déterminer le vecteur vitesse sachant que v (t=0)= v_0 .

2-Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sachant que x(t=0)=x_0 .

3-Montre que $v^2 - v^2 = 2a(x - x_0)$

4-quelle est la condition que doit vérifier $\vec{a}.\vec{v}$ pour que le mouvement soit uniformément accéléré? retardé ?

<u>Exercice 7</u>

Soit un point mobile M décrivant un cercle de rayon R et de centre O avec une vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. A l'instant t=0 le point M est en A

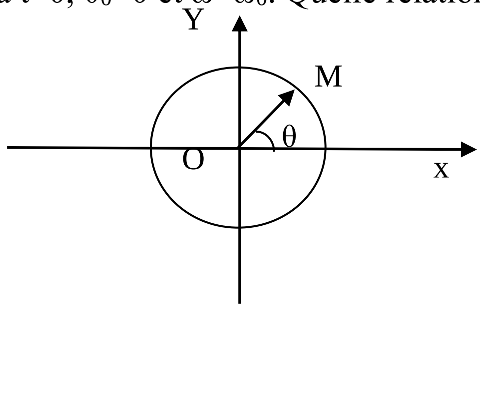
a- Ecrire les coordonnées de M en fonction de R et θ

b- Calculer le module de la vitesse du point M

c- Déterminer les composantes de l'accélération sur les axes Ox et Oy (coordonnées cartésiennes) d'une part et sur les axes parallèles et perpendiculaire à OM d'autre part (coordonnées polaires)

d- On suppose que $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ (α est une constante non nulle). Donner les expressions de ω et θ en fonction du temps

e- On rappelle qu'à t=0, θ_0=0 et $\omega=\omega_0$. Quelle relation existe entre ω et θ.



CORRIGES DES EXERCICES

Exercice 1

a- Nous avons $x(t)=2t^3+5t^2+5$donc :

-La visse serait

$v(t) = \frac{dx}{dt} =6t^2+10t$

-l'accélération serait

$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=12t+10$

b- La position du corps, à l'instant **$t_1=2s$**, ainsi que sa vitesse et son accélération instantanée

La position

$x(2)= 2(2)^3+5(2)^2+5=41m$

La vitesse instantanée

$v(2)=6(2)^2+10(2)=44m/s$

L'accélération instantanée

$a(2)=12(2)+10=34m/s^2$

-La position du corps, à l'instant **$t_2=3s$**, ainsi que sa vitesse et son accélération instantanée

La position

$x(3)= 2(3)^3+5(3)^2+5=104m$

La vitesse instantanée

$v(3)=6(3)^2+10(3)=84m/s$

L'accélération instantanée

$a(3)=12(3)+10=46m/s^2$

c- On déduit la vitesse et l'accélération moyenne du corps entre t_1 et t_2

La vitesse moyenne

$$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} v_{moy} = \frac{104 - 41}{3 - 2} = 63m/s$$

L'accélération moyenne

$$a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} a_{moy} = \frac{84 - 44}{3 - 2} = 40m/s^2$$

EXERCICE 2

Les coordonnées d'un point mobile M dans le plan (oxy) s'écrivent

x(t)=t+1 et y(t)=(t²/2)+2

a- L'équation de la trajectoire s'écrit alors

(Pour trouver l'équation de la trajectoire, il suffit de trouver la relation qui lie x(t) et y(t). Pour cela, on déduit le temps, d'une équation, de x(t) ou de y(t), et on le remplace dans l'autre équation)

Ici, on va écrire t en fonction, de x

t=x-1 donc$y = \frac{(x-1)^2}{2} + 2 = \frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{2}} - \boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$

L'équation de la trajectoire est

$$\mathbf{y(x)} = \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} - \mathbf{x} + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$$

b- Les composantes de la vitesse et de l'accélération

- La vitesse :

$\overrightarrow{\mathrm{v(t)}} = \mathrm{v_x(t)}\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{v_y(t)}\vec{\mathrm{j}}$

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = 1 \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = t \end{cases}$$

La vitesse s'écrit $\overrightarrow{\mathbf{v(t)}} = \vec{\mathbf{i}} + \mathbf{t}\vec{\mathbf{j}}$

Le module de la vitesse $|\vec{v}(t)| = \sqrt{1+t^2}$

-l'accélération

$\overrightarrow{\mathrm{a(t)}} = \mathrm{a_x(t)}\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{a_y(t)}\vec{\mathrm{j}}$

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = 1 \end{cases}$$

L'accélération s'écrit $\overrightarrow{\mathbf{a(t)}} = \vec{\mathbf{j}}$

Le module de l'accélération $|\vec{a}(t)| = 1$

c- les accélérations normales et tangentielles

-L'accélération tangentielle

$a_T = \frac{d|\overrightarrow{v(t)}|}{dt}$avec$|\overrightarrow{v(t)}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1+t^2}$

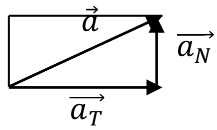
$$a_T = \frac{d(\sqrt{1+t^2})}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

-L'accélération normale

Les accélérations a_N et a_T sont les composantes normales et tangentielles de l'accélération $\vec{a}$

$(\vec{a} = a_T\overrightarrow{U_T} + a_N\overrightarrow{U_N})$

Nous avons la forme d'un triangle droit, en appliquant la relation de Pitagort



$a^2 = a_T^2 + a_N^2$

Donc $a_N^2 = a^2 - a_T^2$

$$a_N^2 = 1 - \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = 1 - \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$a_N^2 = \frac{1}{1+t^2}$$

Donc $a_N = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{v}$

Le rayon de courbure

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{1}{v} \Rightarrow R = v^3 = (1+t^2)^{\frac{3}{2}}$$

d- La nature du movement

$$\overrightarrow{a(t)}.\overrightarrow{v(t)} = 1(0) + t(1) = t > 0$$

Le mouvement alors est *uniformément accéléré*

EXERCICE 3

Une particule se déplace sur une trajectoire dont l'équation de la trajectoire est $y=x^2$ de telle sorte qu'à chaque instant $v_x=v_0=cst$. Si $t=0$, x_0, $y_0=0$.

a- Cherchons Les coordonnées x(t) et y(t) de la particule.

Nous avons suivant (Ox) :$v_x = v_0 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t v_0 dt$

$\Rightarrow \boldsymbol{x(t)} = v_0 t$

D'autre part : y=x²$\Rightarrow y(t) = v_0^2 t^2$

Donc$\begin{cases} \boldsymbol{x(t)} = v_0 t \\ y(t) = v_0^2 t^2 \end{cases}$

b- La vitesse et l'accélération de la particule.

La vitesse

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_0 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = 2v_0^2 t \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v(t)} = v_0 \vec{\imath} + 2v_0^2 t \vec{\jmath}$$

Le module de la vitesse $\left|\overrightarrow{v(t)}\right| = \sqrt{v_0^2 + 4v_0^4 t^2}$

L'accélération

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = 2v_0^2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{a(t)} = 2v_0^2 \vec{\jmath}$$

Le module de l'accélération $\left|\overrightarrow{a(t)}\right| = \sqrt{(2v_0^2)^2} = 2v_0^2$

Les accélérations normale et tangentielle

L'accélération tangentielle

$$a_T = \frac{d\left|\overrightarrow{v(t)}\right|}{dt} = \frac{4v_0^4 t}{\sqrt{v_0^2 + 4v_0^4 t^2}}$$

L'accélération normale

$$a_N^2 = a^2 - a_T^2 \Rightarrow a_N^2 = 4v_0^4 - \frac{16v_0^8 t^2}{v_0^2 + 4v_0^4 t^2}$$

$$\Rightarrow a_N^2 = \frac{4v_0^6}{v_0^2 + 4v_0^4 t^2}$$

Donc

$$a_N = \frac{2v_0^3}{\sqrt{v_0^2 + 4v_0^4 t^2}} = \frac{2v_0^3}{v}$$

Le rayon de courbure

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{2v_0^3}{v} \Rightarrow R = \frac{v^3}{2v_0^3}$$

<u>EXERCICE 4</u>

a-cherchons l'équation de la trajectoire d'un corps dont le mouvement est définit par

$v_x=1$ $\quad\quad$ $v_y=2/(t+1)$

avec à t=0 x=0 et y=2

$$\begin{cases} v_x = 1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1 \\ v_y = \frac{2}{t+1} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t+1} \end{cases} \text{donc} \begin{cases} dx = dt \Rightarrow x = t \\ dy = \frac{2}{t+1}dt \Rightarrow \int_2^y dy = 2\int_0^t \frac{1}{t+1}dt \quad (*) \end{cases}$$

$$(*) \Rightarrow y - 2 = 2\ln(t+1)$$

En remplaçant t par x on a l'équation de la trajectoire de la forme

Y=2+2ln(x+1)

a- Les composantes de l'accélération

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(1)}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(\frac{2}{t+1})}{dt} = \frac{-2}{(t+1)^2} \end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{a(t)} = \frac{-2}{(t+1)^2}\vec{j}$

Son module$|\vec{a}| = \frac{2}{(t+1)^2}$

Exercice 5

$$\begin{cases} v_x = R\omega\cos(\omega t) \\ v_y = R\omega\sin(\omega t) \end{cases}$$

Sachant qu'à t=0, le mobile se trouve à l'origine O (0,0),

1. les composantes du vecteur accélération et son module.

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -R\omega^2 sin\ (\omega t) \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = R\omega^2\cos(\omega t) \end{cases}$$

$$[\vec{a}] = \sqrt{(-R\omega^2 sin\ (\omega t))^2 + (R\omega^2 cos\ (\omega t))^2} = R\omega^2$$

2. Les composantes tangentielle et normale de l'accélération et déduire Le rayon de courbure.

L'accélération tangentielle :

$$[\vec{v}] = \sqrt{(R\omega\ \ cos(\omega t))^2 + (R\omega\ sin\ (\omega t))^2} = R\omega$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{dR\omega}{dt} \Rightarrow a_T = 0$$

L'accélération normale

$a_N = \frac{v^2}{R} = a = \ R\omega^2$ et la rayon de courbure est R

3. Les composantes du vecteur position

$$\begin{cases} v_x = R\omega\cos(\omega t) \\ v_y = R\omega\sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = R\omega\cos(\omega t) \\ \dfrac{dy}{dt} = R\omega\sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = R\omega\cos(\omega t)dt \\ dy = R\omega\sin\ (\omega t)\ dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = R\displaystyle\int \omega\cos(\omega t)dt \\ dy = R\displaystyle\int \omega\sin\ (\omega t)\ dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = R\ \sin(\omega t) \\ y = -R\cos\ (\omega t) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire.

$$x^2 + y^2 = R^2 sin^2\omega t + R^2 cos^2\omega t \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2$$

4. La nature du mouvement

L'accélération a=a$_N$ et l'équation de la trajectoire est $x^2 + y^2 = R^2$ donc le mouvement est circulaire uniforme.

Exercice 6

Un point matériel M se déplace sur l'axe OX avec une accélération $\vec{a} = a\,\vec{\imath}$ avec a > 0.

1-Déterminer le vecteur vitesse sachant que v (t=0)= v_0 .

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\,d\,t$$

$\Rightarrow \boldsymbol{v - v_0 = a\,t}$ (1)

Donc $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a\,t + v_0})\vec{\boldsymbol{\imath}}$

2-Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sachant que x(t=0)=x$_0$.

$$v = \frac{dx}{dt} = a\,t + v_0 \quad \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (a\,t + v_0)d\,t$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \left[\frac{1}{2}\,at^2 + v_0 t\right]_0^t$$

$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}\,at^2 + v_0 t + x_0}$ (2)

$$\Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\,\boldsymbol{a\,t^2 + v_0 t + x_0}\right)\vec{\boldsymbol{\imath}}$$

3. Montrons que $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

(1)$\Rightarrow t = \frac{\boldsymbol{v - v_0}}{a}$ dans (2) $x - x_0 = \frac{1}{2}\,a\left(\frac{\boldsymbol{v-v_0}}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{\boldsymbol{v-v_0}}{a}\right) = \frac{v^2+v_0^2-2vv_0}{2a} + \frac{vv_0-v_0^2}{a}$

$\Rightarrow x - x_0 = \frac{v^2}{2a} + \frac{v_0^2}{2a} - \frac{vv_0}{a} + \frac{vv_0}{a} - \frac{v_0^2}{a}$

$\Rightarrow x - x_0 = \frac{v^2}{2a} + \frac{v_0^2}{a}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{v^2}{2a} - \frac{v_0^2}{2a}$

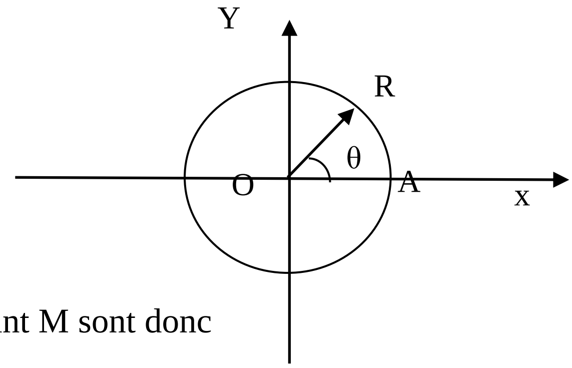
Donc $2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$

4- Pour que le mouvement soit uniformément accéléré, il faut que $\vec{a}.\vec{v}$ soit positif.

Pour que

EXERCICE 7

a- Le point M décrit un cercle de centre o et de rayon R



Les coordonnées du point M sont donc

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

b- La vitesse au point M

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = -R\dfrac{d\theta}{dt}\sin\theta = -R\theta^{\cdot}\sin\theta \\ v_y = R\dfrac{d\theta}{dt}\cos\theta = R\theta^{\cdot}\cos\theta \end{cases}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{R^2\theta^{\cdot 2}(\sin^2\theta) + R^2\theta^{\cdot 2}(\cos^2\theta)}$$

$$\Rightarrow v = R\theta^{\cdot}\ (\theta^{\cdot} = \omega)$$

c- Les composantes de l'accélération

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -R\theta^{\cdot\cdot}\sin\theta - R\theta^{\cdot 2}\cos\theta = (-R\omega^{\cdot}\sin\theta - R\omega^2\cos\theta) \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = R\theta^{\cdot\cdot}\cos\theta - R\theta^{\cdot 2}\sin\theta = (R\omega^{\cdot}\cos\theta - R\omega^2\sin\theta) \end{cases}$$

$$a = \sqrt{R^2\theta^{\cdot\cdot 2} + R^2\theta^{\cdot 4}} = \left(\sqrt{R^2\omega^{\cdot 2} + R^2\omega^4}\right)$$

L'accélération tangentielle :

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{dR\theta^{\cdot}}{dt} \Rightarrow a_T = R\theta^{\cdot\cdot} = R\omega^{\cdot}$$

L'accélération normale

$$a_N = \frac{v^2}{R} = R\dot{\theta}^2 = R\omega^2$$

d-Nous avons $\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha dt \quad donc \quad \omega - \omega_0 = \alpha t \Rightarrow \boldsymbol{\omega = \omega_0 + \alpha t}$ **(*)**

à t=0, θ_0=0 et $\omega=\omega_0$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow d\theta = \omega_0 dt + \alpha t dt$$

$$donc \int_0^\theta d\theta = \int_0^t \omega_0 dt + \int_0^t \alpha t dt$$

$$\theta = \alpha \frac{t^2}{2} + \omega_0 t$$

(*)$\Rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \; donc \; \theta = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\alpha}\right)^2 + \omega_0\left(\frac{\omega-\omega_0}{\alpha}\right) = \frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\alpha}$

Donc $\boldsymbol{\theta = \frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\alpha}}$