Chapitre 4

Fonctions dérivables

4.1 Dérivée d'une fonction

Définition 4.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et f une fonction définie sur I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en $x_0 \in I$ si et seulement si*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. On note cette limite par $f'(x_0)$ et elle s'appelle le nombre dérivée de f en x_0.

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, la fonction

$$\begin{aligned} f' \quad : \quad & I \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f'(x) \end{aligned}$$

est dite dérivée de f. On la note aussi $\frac{df}{dx}$.

Exemple 4.1 *1. Soit la fonction $x \mapsto f(x) = x^2$. Alors pour $x_0 \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Ainsi $f'(x) = 2x$.

2. Soit la fonction $x \mapsto \sin(x)$*. On pose* $h = x - x_0$*, alors*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0)\cos(h)+\sin(h)\cos(x_0)-\sin(x_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\sin(x_0)\frac{(\cos(h)-1)}{h}+\cos(x_0)\frac{\sin(h)}{h}\right]\\ &= \cos(x_0).\end{aligned}$$

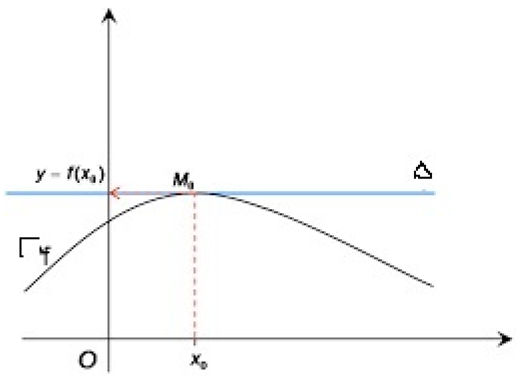
Ainsi $f'(x) = \cos(x)$.

Interprétation géométrique

Soit f une fonction dérivable en x_0 et (Γ_f) la courbe représentative de f. L'équation de la tangente (Δ) à la courbe (Γ_f) au point $M(x_0, f(x_0))$ est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Ainsi $f'(x_0)$ représente la pente de la droite tangente à la courbe (Γ_f) au point M.



Remarque 4.1 *En posant* $h = x - x_0$*,* $h \neq 0$ *alors*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Si on définit une fonction ε *en posant*

$$\varepsilon(h) = \begin{cases}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) & si\ h \neq 0,\\ 0 & si\ h = 0.\end{cases}$$

alors pour $h \neq 0$*, on a*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.

Proposition 4.1 *Si une fonction f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.*

Preuve

Si f est dérivable en x_0, alors

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Ainsi, quand $h \to 0$, on a

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0), \quad (\text{on a } \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)).$$

Par conséquent, f est continue en x_0.

Définition 4.2 *On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si*

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.

On dit que f est dérivable à droite en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.

Remarque 4.2 *1) La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si la dérivée à droite est égale à la dérivée à gauche en x_0.*

2) La réciproque de la proposition 1 est fausse en général. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Exemple 4.2 *Soit*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0, \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

Alors

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1.$$

Ainsi f n'est pas dérivable en 0.

4.1.1 Opérations algébriques sur les dérivées

Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si les fonctions f et g sont dérivables en x_0, alors

1. $f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
3. Si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

4.1.2 Dérivée de la fonction composée

Soient $f : I \to J$ et $g : J \to K$ avec I, J et K des intervalles de $\mathbb{R}$. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors la fonction $gof : I \to K$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Exemple 4.3 *Soient*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ && (4.1)\\ & x \mapsto f(x) = e^x && (4.2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g \quad : \quad & \mathbb{R}^+ \to [-1,1] && (4.3)\\ & x \mapsto g(x) = \sin(x) && (4.4) \end{aligned}$$

Alors, la fonction $h = g \circ f$ définie par

$$\begin{aligned} h \quad : \quad & \mathbb{R} \to [-1,1] && (4.5)\\ & x \mapsto h(x) = \sin(e^x) && (4.6) \end{aligned}$$

est dérivable et la dérivée de h est

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = e^x \cos(e^x)).$$

4.1.3 Dérivée de la fonction réciproque

Soit $f : I \to J$ une fonction continue et bijective. Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$ alors l'application réciproque (ou la fonction inverse), notée f^{-1}, est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et l'on a

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

On remarque que si on pose $g = f^{-1}$, alors on sait que $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$. Ainsi $g'(f(x_0)) = \frac{(g\circ f)'(x_0)}{f'(x_0)}$.
puisque $(g \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$ alors $(g \circ f)'(x_0) = 1$. Donc

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Ainsi

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Exemple 4.4 *Soit*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R} \to]0, +\infty[\\ & x \mapsto f(x) = e^x \end{aligned}$$

puisque f est bijective, alors elle admet une fonction inverse f^{-1} donnée par

$$\begin{aligned} f^{-1} \quad : \quad &]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ & y \mapsto f^{-1}(y) = \ln(y), \end{aligned}$$

avec $y = e^x$. Ainsi

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

4.1.4 Dérivées des fonctions usuelles

Ici, nous rappelons les dérivées de quelques fonctions usuelles.

Fonction f	D_f	Fonction dérivée f'	$D_{f'}$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x^\alpha,\ \alpha \in]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

En utilisant la dérivée de la fonction composée, alors pour une fonction donnée f, on a les formules de dérivations suivantes

$$\begin{aligned}
(f^n)' &= nf^{n-1}f', \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}\\
(f^\alpha)' &= \alpha f^{\alpha-1}f', \quad \text{pour} \quad \alpha \in \mathbb{R}\\
(\ln f)' &= \frac{f'}{f}\\
(\mathrm{e}^f)' &= f'\mathrm{e}^f\\
(\sin f)' &= f'\cos f\\
(\cos f)' &= -f'\sin f\\
(\tfrac{1}{f})' &= -\frac{f'}{f^2}
\end{aligned}$$

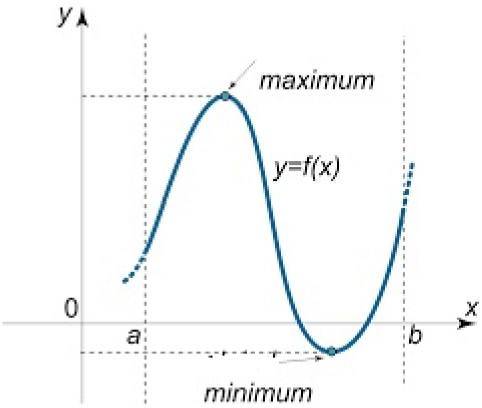
4.2 Dérivées et extremas

On étudie dans cette section, le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variations d'une fonction réelle. Voici un premier résultat.

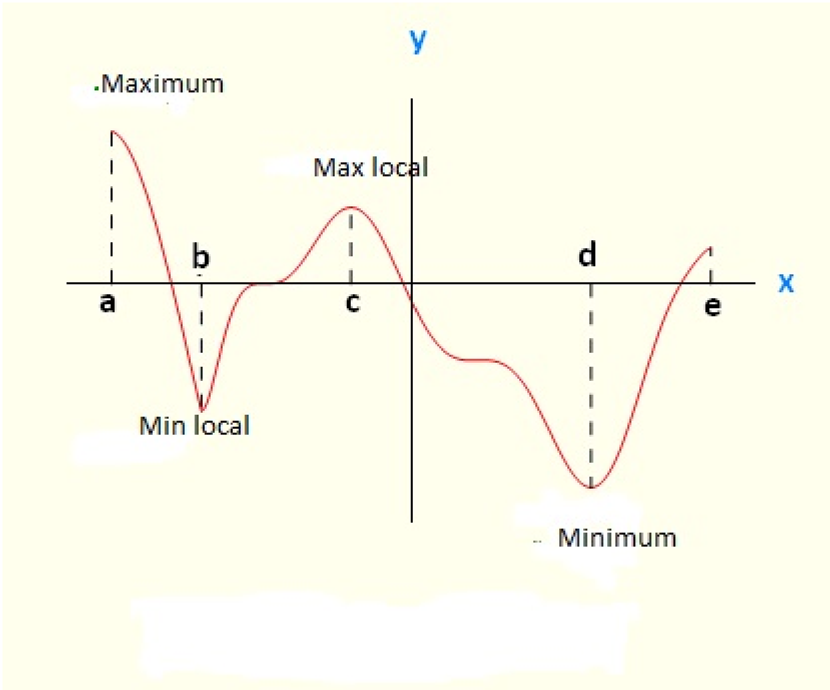
Proposition 4.2 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors*
1) f est croissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est positive ou nulle sur I.
2) f est décroissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est négative ou nulle sur I.
3) f est strictement croissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est strictement positive sur I.
4) f est strictement décroissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est strictement négative sur I .

Maintenant, soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit c un point de I. Alors

Définition 4.3 *1) On dit que f admet un maximum en c si $\forall x \in I$, $f(x) \leq f(c)$.*
2) On dit que f admet un minimum en c si $\forall x \in I$, $f(x) \geq f(c)$.
3) On dit que f admet un extremum en c si elle admet un maximum ou un minimum en c.



Définition 4.4 *1) On dit que f admet un maximum local en c s'il existe un $r > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [c-r, c+r,]$ $f(x) \leq f(c)$.*
2)On dit que f admet un minimum local en c s'il existe un $r > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [c-r, c+r,]$ $f(x) \geq f(c)$.
Dans les deux cas, on dit que f admet un extremum local.



Exemple 4.5 *Soit $f(x) = x^2$.*
Remarquons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq f(0) = 0.$$

Ainsi, 0 est un minimum.

Proposition 4.3 *Soit $f\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un extremum local en un point $c\in]a,b[$, alors $f'(c)=0$.*

Preuve
Supposons que c est un maximum local de f. Soit $x\in I\cap[c-r,c+r]$ tel que $f(x)\leq f(c)$.
• Pour $x\leq c$, on a $f(x)-f(c)\leq 0$ et $x-c\leq 0$ et donc,

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0\Rightarrow \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0.$$

• Pour $x\geq c$, on a $f(x)-f(c)\leq 0$ et $x-c\geq 0$. Alors

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0\Rightarrow \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0.$$

Comme f est dérivable, alors on a

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)=0.$$

Remarque 4.3 *La réciproque de la proposition précédente est fausse car par exemple pour $f(x)=x^3$, on a $f'(0)=0$ mais 0 n'est pas un extremum local.*

4.3 Théorèmes fondamentaux de la dérivation

Théorème 4.1 *(Théorème de Rolle)*
Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a)=f(b)$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f'(c)=0.$$

Preuve
• Si f est constante, alors sa dérivée est toujours nulle.
• Si f est non constante, alors f admet un mimimum global et un maximum global sur $[a,b]$ et ils sont de valeurs différentes. Comme $f(a)=f(b)$, alors au moins une des valeurs a ou b n'est pas un de ces extremas globaux. Donc, ceci veut dire qu'il existe $c\in]a,b[$ qui soit un extremum global de f. Ainsi, d'après la proposition précédente, $f'(c)=0$.

Théorème 4.2 *(Théorème des accroissements finis)*
Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

Preuve
Posons
$$l = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - l(x - a).$$
Remarquons que puisque g est dérivable sur $]a, b[$ alors $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(a) - l(b - a) = f(a)$.
Ainsi, par le théorème de Rolle, il existe un $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Comme $g'(x) = f'(x) - l$, alors $g'(c) = f'(c) - l = 0$, ce qui implique que
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Exemple 4.6 *Montrons que*
$$\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2}, \quad x > 0.$$
Posons $f(x) = \sqrt{1 + x}$, *alors* $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ *et* $f(0) = 1$.
Pour $x > 0$, *appliquons le théorème des accroissements finis sur* $[0, x]$. *alors, il existe un* $c \in]0, x[$ *tel que*
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{1 + c}} < \frac{1}{2}.$$
Ainsi,
$$\frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} < \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2}.$$
Ceci montre le résultat voulu.

Proposition 4.4 *(Règle de l'Hôpital).*
Soient f *et* g *deux fonctions continues sur* $[a, b]$ *et dérivables sur* $]a, b[$ *tel que* $g'(x) \neq 0$ *sur* $]a, b[$.
Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, *alors on a le résultat suivant*
$$Si \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l, \quad alors, \quad \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$
Le résultat est vrai aussi si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$.

Exemple 4.7 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{2x - \pi}{\cos^2(x)} =?$ *On a* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} 2x - \pi = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \cos^2(x) = 0$. *Alors ,* *par la règle de l'Hôpital,*
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{2}{-2\cos(x)\sin(x)} = +\infty.$$

4.4 Dérivées successives

Définition 4.5 *Etant donnés un entier naturel n non nul et une fonction f dérivable n fois sur I. Alors, la dérivée nième est définie de la façon suivante*

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

avec pour convention $f^{(0)} = f$. *($f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$).*
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée nième existe, alors on dit que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4.8 *La fonction $f(x) = e^x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.*

Définition 4.6 • *Soit n un entier naturel non nul. On dit que f est de classe C^n sur I si f est n fois dérivable sur I et sa dérivée nième $f^{(n)}$ est continue sur I.*
• *Si $n = 0$, alors on dit juste que f est continue. (De classe C^0).*