Solution TD n 4 : Les fonctions dérivables.

Ex 1 : (1) $f(x) = e^{3x} + e^{1/x}$

La fonction est définie ssi $x \neq 0$. Ainsi,

$$f'(x) = 3e^{3x} - \frac{1}{x^2} e^{1/x}, \quad x \neq 0.$$

(2) $f(x) = \sqrt{1+(x\cos x)^2}$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. On sait que

$$\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}.$$ Alors, on pose $g(x) = 1+(x\cos x)^2$.

On a :

$$g'(x) = (x^2\cos^2 x)' = 2x\cos x + 2x^2\cos x(-\sin x)$$
$$= 2(x\cos x - x^2\cos x\sin x).$$

Ainsi,

$$f'(x) = \frac{\cancel{2}(x\cos^2 x - x^2\cos x\sin x)}{\cancel{2}\sqrt{1+(x\cos x)^2}} = \frac{x\cos^2 x - x^2\cos x\sin x}{\sqrt{1+(x\cos x)^2}}.$$

(3) $f(x) = \sin(\cos(3x))$.

pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (\sin g(x))'$ où $g(x) = \cos(3x)$

$\Rightarrow f'(x) = g'(x)\cos(g(x))$ où $g'(x) = -3\sin(3x)$.

Ainsi pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -3\sin(3x)\cos(\cos(3x)).$$

Ex2 : (1) $f(x) = x|x|$.

On remarque que $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Il reste le point 0. pour cela, calculons le taux de variations

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

(2) $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Etudions la dérivabilité en 0.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{1+x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1-x} = 1.$$

Donc, f n'est pas dérivable en 0.

(3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

pour le point 0, on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0 \quad \left(0 < \left|x\cos\frac{1}{x}\right| < |x| \right)$$

Ainsi, f est dérivable en 0.

Ex3: (1) $f(x) = e^{ax}$.

On a facilement, $f'(x) = a e^{ax}$, $f''(x) = a^2 e^{ax}$ ... $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$

On vérifie cela par récurrence, si $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$ à l'ordre n, alors en dérivant, on obtient :

$$f^{(n+1)}(x) = a^n a e^{ax} = a^{n+1} e^{ax},$$

ce qui est la relation à l'ordre $n+1$. Ainsi, pour $n \geq 0$, on a : $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$.

(2) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2.3}{(1-x)^4}$$

$$\ldots \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad \ldots (*)$$

Supposons que la propriété $(*)$ est vraie à l'ordre n, alors en dérivant cette relation $(*)$, on obtient

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{-n!(n+1)(1-x)^n(-1)}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

qui est la propriété $(*)$ à l'ordre $(n+1)$. Ainsi, pour $n \geq 0$, $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Ex4 : On a : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ ax^2+bx+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Remarquons que premièrement, il faut que f soit continue en 1. Pour cela, il faut que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (ax^2+bx+1) = a+b+1.$$

Donc $\boxed{a+b+1 = 1}$ ---- (1)

D'autre part,

sur $[0,1]$, la fonction $\sqrt{x}$ est dérivable et pour $x>1$, la fonction ax^2+bx+1 est dérivable.

Maintenant, en 1, on a limite à droite et à gauche du taux d'accroissement en 1. On a :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} \text{ et}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(ax^2+bx+1)-(a+b+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (ax+a+b) = 2a+b$$

(on peut remarquer que $(ax+a+b)(x-1) = ax^2+bx-a-b$).

Ainsi, pour que f soit dérivable en 1, il faut que

$\boxed{2a+b = \frac{1}{2}}$ ---- (2)

Donc, d'après (1) et (2), on a :

$$\boxed{a = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b = -\frac{1}{2}}.$$

Ex5 : 1) Remarquons que f_n est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. De plus, $f_n(0) = f_n(1) = 0$.
Donc, on peut appliquer le théorème de Rolle pour montrer l'existence de $\alpha_n \in]0,1[$ tel que

$$f'(\alpha_n) = 0.$$

2) On a :

$$f_n'(x) = n x^{n-1} \sin(\pi x) + \pi x^n \cos(\pi x)$$
$$= x^{n-1}\left[n \sin(\pi x) + \pi x \cos(\pi x)\right]$$

Ainsi, $f_n'(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow (\alpha_n)^{n-1}\left[n \sin(\pi\alpha_n) + \pi\alpha_n \cos(\pi\alpha_n)\right] = 0$

$$\Leftrightarrow n \sin(\pi\alpha_n) + \pi\alpha_n \cos(\pi\alpha_n) = 0 \quad \text{car } \alpha_n \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \sin(\pi\alpha_n) = -\frac{\pi\alpha_n}{n} \cos(\pi\alpha_n)$$

Ceci implique que

$$f_n(\alpha_n) = \alpha_n^n \sin(\pi\alpha_n) = -\frac{\pi}{n}(\alpha_n)^{n+1} \cos(\pi\alpha_n).$$

3) On a : $$\left| f_n(\alpha_n)\right| = \left| -\frac{\pi}{n}(\alpha_n)^{n+1} \cos(\pi\alpha_n)\right|$$
$$= \frac{\pi}{n}\left|(\alpha_n)^{n+1} \cos(\pi\alpha_n)\right| < \frac{\pi}{n}.$$

Par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(\alpha_n) = 0$.

Ex6 : 1) Considérons la fonction $f(t) = \ln t$ définie sur l'intervalle $[x, x+1]$, $x > 0$. Elle est donc continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. Ainsi, par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = (x+1-x) f'(c)$. Donc

$$\ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{c}.$$

puisque $x < c < x+1 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{c} > \frac{1}{x+1}$

Ainsi,

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\ln(1+x) - \ln x\right) = ?$

D'après la question (1), on a pour $x > 0$,

$$\frac{\sqrt{x}}{1+x} < \sqrt{x}\left(\ln(1+x) - \ln x\right) < \frac{\sqrt{x}}{x}.$$

puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = 0$, alors par le théorème d'encadrement, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\ln(1+x) - \ln x\right) = 0$.

3) Remarquons que

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = x\left[\ln(1+x) - \ln x\right].$$

D'autre part, on a : pour $x>0$

$$\frac{x}{1+x} < x\left(\ln(1+x) - \ln x\right) < 1$$

et par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(1+x) - \ln x\right) = 1$.

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = \lim e^{x[\ln(1+x)-\ln x]}$$

$$= e.$$

EX7 : (Facultatif).

I) 1) Soit $f(t) = e^{1/t^2}$. La fonction f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

En utilisant le théorème des accroissements finis entre x et $x+1$ avec $x>0$, on trouve qu'il existe $c \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x+1) - f(x) = f'(c).$$

Sachant que pour $t \neq 0$, $f'(t) = -\frac{2}{t^3} e^{1/t^2}$, alors

$$e^{\frac{1}{(x+1)^2}} - e^{\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{c^3} e^{1/c^2}.$$

Ceci implique que

$$x^3\left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}\right) = \frac{2x^3}{c^3} e^{1/c^2}.$$

puisque $0 < x \leq c \leq x+1$, alors $x^2 \leq c^2 \leq (x+1)^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

On sait aussi que $t \to e^t$ est une fonction croissante, alors $e^{\frac{1}{(x+1)^2}} \leq e^{\frac{1}{c^2}} \leq e^{\frac{1}{x^2}}$.

D'autre part, on a :

$$\frac{1}{(x+1)^3} \leq \frac{1}{c^3} \leq \frac{1}{x^3} \Rightarrow \frac{2x^3}{(x+1)^3} \leq \frac{2x^3}{c^3} \leq \frac{2x^3}{x^3}.$$

Ainsi,

$$\frac{2x^3}{(x+1)^3} e^{\frac{1}{(x+1)^2}} \leq \frac{2x^3}{c^3} e^{\frac{1}{x^2}} \leq 2 e^{\frac{1}{x^2}}$$

puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{\frac{1}{x^2}} = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{(x+1)^3} e^{\frac{1}{(x+1)^3}} = 2$

alors par le théorème d'encadrement, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 \left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}} \right) = 2.$$

II) Soit $f(x) = e^{x/2} - e^{-x/2} - x$.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x/2} - e^{-x/2} - x = \lim e^{\frac{x}{2}} \left(1 - e^{-x} - \frac{x}{e^{x/2}} \right) = +\infty$

2) On a :

$$f'(x) = \frac{1}{2} e^{x/2} + \frac{1}{2} e^{-x/2} - 1 \quad \text{et}$$

$$f''(x) = \frac{1}{4} e^{x/2} - \frac{1}{4} e^{-x/2}.$$

3) On a:

$\cancel{\forall x > 0}$, $e^{x/2} > e^{-x/2}$ qui implique que

$$f''(x) > 0 \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Ainsi, f' est croissante sur $]0, +\infty[$.

puisque $f'(0) = 0$, alors pour tout $x > 0$, on a:

$$f'(x) > 0.$$

Ceci implique que f est croissante.

4) Remarquons que $f(0) = 0$, alors on a le tableau de variation suivant:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

Ex6: (Facultatif)

1) Nous remarquons que la fonction f peut s'écrire comme

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \\ \dfrac{1-x}{x+1} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 - a^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Le seul point qui donne problème à la continuité de f est 0.

On obtient,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-x}{x+1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 - a^2 = -a$$

Ainsi, f est continue en 0 ssi $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

Donc, $\boxed{a = -1}$

2) pour étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$, il faut que f soit continue sur $\mathbb{R}$, donc $a=-1$.

Nous remarquons que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

Seuls les points 0 et 1 qu'il faut étudier la dérivabilité.

pour cela,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1-x}{x+1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{x(x+1)} = -2$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1-1}{x} = 0$$

puisque les limites à droite et à gauche du taux de variations sont différentes, alors f n'est pas dérivable en 0.

pour le point 1, on a :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x-1}{x+1}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1-x}{x+1}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, f n'est pas dérivable en 1.

Ex 9 : (Facultatif)

1) pour $x<1$, f est un polynôme et donc f est continue.

pour $x \geq 1$, $x \neq 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue.

Il reste le point $x=1$. On a :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1 = f(1) \quad \text{et}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{3-x^2}{2} = 1 = f(1).$$

Donc, f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) On remarque que si $x \neq 1$, alors la fonction f est dérivable.

La dérivabilité en $x=1$.

pour $x<1$, on a :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{3-x^2}{2}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x^2-1)}{x-1} = -1.$$

pour $x \geq 1$, on a :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{x} = -1$$

Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b)-f(a) = f'(c)\,(b-a).$$

puisque notre fonction f est continue sur $[0,2]$ et dérivable sur $]0,2[$, alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0,2[$ tel que

$$f(2) - f(0) = (2-0) f'(c).$$

1) On a : $f(2) = \frac{1}{2}$ et $f(0) = \frac{3}{2}$.

par conséquent,

$$f(2) - f(0) = 2 f'(c) \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 2 f'(c)$$

$$\Leftrightarrow f'(c) = -\frac{1}{2}.$$

pour $0 < c \leq 1$, on a :

$$f'(c) = -c = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

pour $1 < c < 2$, on a :

$$f'(c) = \frac{-1}{c^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2}$$

puisque $-\sqrt{2} \notin]1,2[$, alors $c = \sqrt{2}$.

Ex 10 : (Facultatif)

1) puisque f est dérivable sur $]0,+\infty[$, alors la fonction $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est aussi dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}.$$

2) Appliquons le théorème des accroissements finis entre 0 et x. f est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$ donc, il existe $c \in]0,x[$ tel que

$$f(x) - f(0) = (x-0) f'(c)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x f'(c)$$

Donc, $g'(x) = \dfrac{x f'(x) - x f'(c)}{x^2} = \dfrac{x(f'(x) - f'(c))}{x^2} = \dfrac{f'(x) - f'(c)}{x}$

Comme $x > 0$ et f' est croissante entraine que $c < x$

$\Rightarrow f'(c) \leq f'(x)$

et donc $g'(x) \geqslant 0$.

Ainsi, g est croissante sur $]0, +\infty[$.