Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Licence 1ère année MI, 2020–2021

<u>ANALYSE1</u>
Fiche de TD 4 : Fonctions dérivables.

Exercice 1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant leurs domaines de définition.

$$1)f(x) = e^{3x} + e^{1/x}, \quad 2)f(x) = \sqrt{1 + (x\cos(x))^2}, \quad 3)f(x) = \sin(\cos(3x)).$$

Exercice 2. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes

$$1)f(x) = x|x|, \qquad 2)f(x) = \frac{1}{1+|x|}, \qquad 3)f(x) = \begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } \ x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 3. Calculer la dérivée nième des fonctions suivantes

$$1)f(x) = e^{ax}, \qquad 2)f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Exercice 4. Soient a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } \ 0 \leq x \leq 1, \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

Exercice 5. Pour $n \geq 0$, on définit les fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.

1) Montrer qu'il existe $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n'(\alpha_n) = 0$.

2) Calculer $f_n(\alpha_n)$ en fonction de α_n, de n et de $\cos(\pi\alpha_n)$.

3) En déduire la limite de $f_n(\alpha_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6. 1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

2) Cacluler $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\ln(1+x) - \ln(x))$.

3) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x = e$.

Exercice 7. (Facultatif) I) En utilisant le théorème des accroissements finis, calculer

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 \left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}} \right).$$

II) Soit la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Calculer f' et f''.

3) Montrer que $f''(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et en déduire que la fonction f est croissante.

4) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 8. (Facultatif) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x+1} & \text{si } \ x > 0, \\ x^2 - a & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1) Déterminer la valeur du paramètre a pour que la fonction f soit continue.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f.

Exercice 9. (Facultatif) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } \ x < 1, \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe $c \in]0, 2[$ tel que

$$2f'(c) = f(2) - f(0).$$

4) Déterminer toutes les valeurs possible de c.

Exercice 10. (Facultatif) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue, dérivable dans $]0, +\infty[$ telle que $f(0) = 0$. On désigne par $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

1) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $g'(x)$.

2) Montrer que si f' est croisante sur $]0, +\infty[$, il en est de même de g.