Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Licence 1ère année MI, 2020–2021

Analyse1
Fiche de TD 3 : Fonctions d'une variable réelle.

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

$$1)f(x)=\sqrt{6-|x-2|},\quad 2)f(x)=\frac{1}{x}\ln(\frac{e^x-1}{x}),\quad 3)f(x)=\frac{x-\sqrt{|x^2-1|}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

Exercice 2. I) Étudier la parité des fonctions suivantes après avoir déterminer leurs domaines de définition

$$1)f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1},\qquad 2)f(x)=\cos(x)+\sin(x),\qquad 3)f(x)=\cos(2x)+\tan^2(x).$$

II) Étudier la périodicité des fonctions suivantes

$$1)f(x)=\cos\left(\frac{3x}{2}\right),\qquad\qquad 3)f(x)=\cos(2x)-\sin(4x).$$

III) Montrer que la fonction $f(x)=E(x)-x$ est périodique de période 1.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $]-\infty,3]$ par $f(x)=2+\sqrt{3-x}$ et g la fonction définie sur $[2,+\infty[$, par $g(x)=-x^2+4x-1$.
1) Montrons que pour tout $x\in[2,+\infty[$, $(f\circ g)(x)=x$.
2) Montrons que pour tout $x\in]-\infty,3]$, $(g\circ f)(x)=x$.
3) Est ce que, dans cet exemple, $g\circ f=f\circ g$?

Exercice 4. Calculer les limites des fonctions suivantes

$$1)\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right),\qquad 2)\lim_{x\to0}xE(\frac{1}{x}),$$

$$3)\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2x})}{x},\qquad 4)\lim_{x\to+\infty}e^{x-\sin(x)}.$$

Exercice 5. Étudier la continuité des fonctions suivantes

$$1)f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|}\sqrt{|x|} & \text{si } x\neq0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}\qquad 2)f(x)=E(x)+\sqrt{x-E(x)}$$

Exercice 6. Soient a et b deux réels et soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x<0,\\ 1 & \text{si } x=0,\\ 2be^x-x & \text{si } x>0.\end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue.

Exercice 7. Les fonctions suivantes sont-elle prolongeable par continuité aux points x_0 indiqué ? Si oui, écrire leur prolongée.

$$1) f(x) = \sin(x)\sin(\frac{1}{x}), (x_0 = 0); \quad 2) f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}, (x_0 = 1);$$

Exercice 8. Montrer que l'équation $x + e^x = 0$ possède une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9. (Facultatif) Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$1) f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}, \quad 2) f(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \quad 3) f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x)}}{1-\ln(x)}, \quad 4) f(x) = \cot(\sqrt{x}).$$

Exercice 10. (Facultatif) Calculer les limites suivantes

$$1) \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln(x)+x}, \qquad 2) \lim_{x\to 0} x^2 E(\frac{1}{x}), \qquad 3) \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)},$$

$$4) \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, \qquad 5) \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(x)+5}{x^2+4} \qquad 6) \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$$

Exercice 11. (Facultatif)Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

$$1) f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \qquad 2) f(x) = \begin{cases} 1 + x\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 12. (Facultatif) 1) Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. On dit alors que x_0 est un point fixe de f.
2) Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet une solution comprise entre 0 et 1.
3) Donner un exemple de fonction continue $g :]0, 1[\to]0, 1[$ qui n'admet pas un point fixe.

Exercice 13. (Facultatif) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$.
2) Déterminer f^{-1}.

Exercice 14. (Facultatif) Soit f la fonction défine par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 4, \\ (x+a)^2 & \text{si } x < 4. \end{cases}$$

Déterminer a pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. (Facultatif) Soit $n \geq 2$, et f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1.$$

1) Montrer que f_n possède une racine unique u_n dans $\mathbb{R}_*^+$.
2) Montrer que la suite (u_n) est une suite croissante de l'intervalle $]0, \frac{2}{3}[$ et trouver sa limite.