Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Licence 1ère année MI, 2020–2021

Analyse1
Fiche de TD 2 : Les suites réelles.

Exercice 1. En utilisant la définition de la convergence d'une suite, vérifier que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2.$$

Exercice 2. Déterminer les limites des suites numériques suivantes

$$1)\ \lim_{n\to+\infty} n - \sqrt{(n+1)(n-2)} \qquad 2)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}} \qquad 3)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+\ln(n))}{\ln(2n+\ln(n))}$$

$$4)\ \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}\right), \qquad 5)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n^3+1}, \qquad 6)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n e^{-3n}}{n}$$

Exercice 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$u_n = \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right)^n$$

1) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right| < \frac{3}{4}.$$

2) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n}$$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2) Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite vérifie $\frac{1}{2} \leq l \leq 1$.

Exercice 5. Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1}.$$

On suppose que $u_0 \in \mathbb{R}^+$.
1)Monter que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
2)Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n + \frac{1}{2}$ puis que $u_n \geq u_0 + \frac{n}{2}$.
3)En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique définie par

$$u_0 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right), \quad t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right].$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge.

Exercice 7. (Facultatif) Soit u_0 et u_1 deux nombres réels. On définit une suite (u_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}.$$

1)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| = \frac{|u_1 - u_0|}{2^n}$.
2) Montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, si $p \geq n+2$, alors u_p est entre u_n et u_{n+1}.
3) En déduire que (u_n) est une suite de Cauchy.
4) Calculer la limite de (u_n) en fonction de u_0 et u_1.

Exercice 8. (Facultatif) I) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
II) On rappelle que la partie entière d'un nombre réel α est l'unique entier, noté $E(\alpha)$, vérifiant $E(\alpha) \leq \alpha < E(\alpha)+1$. Etablir que $\alpha - 1 < E(\alpha) \leq \alpha$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{E(\pi) + E(2\pi) + ... + E(n\pi)}{n^2}.$$

1) Montrer que l'on a l'encadrement

$$\frac{\pi(n+1)-2}{2n} < u_n \leq \frac{\pi(n+1)}{2n}.$$

2) Déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 9. (Facultatif) Déterminer (quand elle existe) la limite, quand $n \to +\infty$, des suites numériqurs suivantes :

$$1)\ U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad 2)\ U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$3)\ U_n = \frac{\ln(n)}{2\sqrt{n}}, \qquad 4)\ U_n = \frac{2n^3 + n^2 + 1}{-n^3 + n + 1},$$

$$5)\ U_n = \frac{\sin(n)}{n^2+1}, \qquad 6)\ U_n = \frac{2n + 1 - \cos n\pi}{n}.$$

Exercice 10. (Facultatif) Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2}{3U_n + 2} \end{cases}, \forall n \geq 0.$$

1) Montrer que $\forall n \geq 0,\ U_n > 0$.
2) Vérifier que l'équation $x = \frac{x+2}{3x+2}$ n'admet qu'une solution positive a.
3) Montrer que $\forall n \geq 0,\ |U_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$. En déduire la limite de la suite (U_n).

Exercice 11. (Facultatif) Soient (U_n) et (V_n) deux suites définie par $U_0 > V_0 > 0$ et par les relations de récurrence :

$$U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}, \qquad V_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}.$$

a) Montrer que $\forall n \geq 0$, on a $U_n \geq 0$, $V_n \geq 0$ et $U_n \geq V_n$.
b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante minorée et la suite (V_n) est croissante majorée.
c) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes.
d) Montrer que la suite (W_n) définie par $W_n = U_n - V_n$ a pour limite 0. En déduire que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite.