Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Licence 1ère année MI, 2020–2021

Analyse1
Fiche de TD 1 : Les nombres réels.

Exercice 1. On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
1) Montrer que $a = 6 + 4\sqrt{2}$ et $b = 6 - 4\sqrt{2}$ sont irrationnels.
2) Calculer $\sqrt{ab}$.
3) Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est rationnel.

Exercice 2. On suppose que $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels. Montrer que
1) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.
2) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ est irrationnel.

Exercice 3. Pour chacun des sous-ensembles suivants, donner sa borne supérieure et sa borne inférieure dans $\mathbb{R}$ (si elle existe), et préciser s'il a un maximum, un minimum.

$$A =]0, 2], \quad B = \{\frac{x+1}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R}, x \leq -3\}, \quad C = \{5 - \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Exercice 4. Trouver les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation suivante

$$|x - 1| + |x - 2| = 2.$$

Exercice 5. I) Soient x et y deux réels.
1) Montrer que

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1.$$

2) Montrer que $E(\frac{1}{n}E(nx)) = E(x)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

II) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \frac{|x|}{1 + |x|}.$$

Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

Exercice 6. (Facultatif) 1) Soit $m_n = 0.20192019....2019$ (n fois).
Écrire m_n sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
2) Soit $m = 0.20192019...$ (une infinité de fois).
Écrire m sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.

Exercice 7. (Facultatif) Démontrer que les réels suivants sont irrationnels.
1) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, où a et b sont des entiers positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont irrationnels.
2) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Exercice 8. (Facultatif)
1) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$, alors $r + x \notin \mathbb{Q}$.
2) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}^*$ et $x \notin \mathbb{Q}$, alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
3) Soient r_1 et r_2 deux rationnels tels que $r_1 < r_2$.
a) En déduire que $x = r_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1)$ est irrationnel.
b) En déduire qu'entre deux rationnels disctincts, il y a au moins un irrationnel.

Exercice 9. (Facultatif) Pour chacun des sous-ensembles suivants, donner sa borne supérieure et sa borne inférieure dans $\mathbb{R}$ (si elle existe), et préciser s'il a un maximum, un minimum.

$$A = \{x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 - 1 < 0\}, \quad B =]1, 2[\cap \mathbb{Q},$$

$$C = \{(-1)^n n - \frac{3}{n} - n, \quad n \in \mathbb{N}^*\}, \quad D = \{x \in \mathbb{Q}, \quad |x - \sqrt{2}| \leq \sqrt{2}\}.$$

Exercice 10. (Facultatif)
Soit E l'ensemble suivant

$$E = \{x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2 - x} > x\}.$$

1) Déterminer l'ensemble E.
2) Déterminer, s'il existe, $\inf(E)$, $\min(E)$, $\sup(E)$ et $\max(E)$.

Exercice 11. (Facultatif) Soit $A = \{x^2 + y^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad xy = 1\}$.
1)Montrer que A possède une borne inférieure que l'on déterminera.
2) A possède-t-elle une borne supérieure ?

Exercice 12. (Facultatif) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante

$$|2x^2 - 1| \leq |x + 1|$$