Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire 2020-2021**
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère Année LMD Mathématique et Informatique Algèbre 1

Fiche de TD 2 : Ensembles, Applications et Relations binaires

---

Exercice 1 :

Soit A un ensemble, et X, Y et Z des parties de A. Démontrer les propriétés suivantes :

a. $C_A(C_A(X)) = X$.

b. $C_A(X \cup Y) = C_A(X) \cap C_A(Y)$ et $C_A(X \cap Y) = C_A(X) \cup C_A(Y)$.

c. $X \subset Y \Leftrightarrow C_A(Y) \subset C_A(X)$.

Exercice 2 :

Soit f une application de E vers F. Soient A et A' des parties de E. Soient B et B' des parties de F. Montrer que :

$$
\begin{array}{cc}
1) A \subset f^{-1}(f(A)) & 2) f(f^{-1}(B)) \subset B \\
3) f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') & 4)\ f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A') \\
5) f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') & 6) f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')
\end{array}
$$

Montrer que si f est injective alors on a l'égalité dans 4).

Exercice 3 :

Les applications suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(x) = 2x$.
2. g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $g(x) = 2x + 1$.
3. h de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $h(x) = |x| - [x]$.
4. u de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $u(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 4 :

Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

1. Vérifier que pour tout réel a non nul on a $h(a) = h(\dfrac{1}{a})$. L'application h est-elle injective ?

2. Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = h(x)$.

a. Montrer que f est injective.

b. Vérifier que : $\forall x \in I, f(x) \leqslant 2$.

c. Montrer que f est une bijection de I sur $]0, 2]$ et trouver f^{-1}.

Exercice 5 :
Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de x pour tout réel x.
3. Déterminer l'ensemble quotient.

Exercice 6 :
Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 7 :
Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation définie par :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow (x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y').$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
2. Préciser deux majorants, deux minorants, la borne supérieure et la borne inférieure de la partie $A = \{(1, 2), (3, 1)\}$.
3. La partie A possède t-elle un plus grand élément et un plus petit élément ?

Page_web :https ://sites.google.com/view/mamcha/accueil.