Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire 2020-2021**
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère année LMD Mathématiques et Informatique ALGÈBRE 1

Fiche de TD 1 : Logique et Raisonnements

Exercice 1 : Dans le LMD mathématique et informatique, un étudiant qui sera admis en deuxième année choisira entre mathématique OU informatique mais pas les deux simultanément. C'est le OU 'exclusif'.
Écrire la table de vérité du " ou exclusif ".

Exercice 2 : Soient p et q deux propositions données. En utilisant la table de vérité, montrer que

$$(1)\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})\,,$$

$$(2)\,(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})\,.$$

Exercice 3 : Soient A, B, C, D des propositions. Montrer que :
(A ou B) et (C ou D) est équivalent à (A et C) ou (A et D) ou (B et C) ou (B et D).
Application : trouver les couples de réels (x, y) tels que :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

Exercice 4 : Former la négation des propositions suivantes :

1. $[(p \Rightarrow q) \vee r] \wedge (p \vee q)$.
2. $[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \wedge r)$.

Exercice 5 : Soient les assertions suivantes :
$(a) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0\,;$ $(b) \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0;$
$(c) \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0\,;$ $(d) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x.$
Les assertions $(a), (b), (c), (d)$ sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

Exercice 6 : Soit F l'ensemble des femmes. On note $P(x, y)$ l'expression

" x est la fille de y ", où x et y sont dans F.

Ecrire les formules suivantes dans le langage des ensembles puis en écriture formalisée, puis les nier en écriture formalisée (voir exemple ci-dessous) :
1. Toute femme a au moins une fille.
2. Il y a au moins une femme qui a au moins une fille.
3. Toute femme a au moins une mère.
4. Il y a au moins une femme qui n'a aucune fille.

Par exemple, la première proposition s'écrit : " pour tout y dans F, il existe x dans F tel que x est la fille de y " dans le langage des ensembles, et $\forall y \in F, \exists x \in F, P(x,y)$ en écriture formalisée. Sa négation en écriture formalisée est : $\exists y \in F, \forall x \in F, \overline{P(x,y)}$.

Exercice 7 : Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}.$$

Exercice 8 : Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante pour $n \in \mathbb{N}^*$:

Si l'entier (n^2-1) n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente.
2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$ (à justifier), prouver la contraposée.

Exercice 9 : Montrer par l'absurde que

$$\forall a, b \geqslant 0 : \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b.$$

Page_web :https ://sites.google.com/view/mamcha/accueil.