Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2020/2021

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

1ère année M.I - Semestre 1

Examen de rattrapage : Analyse 1

Durée : 1h30mn

Aucun document n'est autorisé.
L'usage de tout appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (4 Pts).
Soit $(a,b) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ tel que $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$.
Montrer que $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2. (6 Pts).
On considère a un réel tel que $0 < a < 1$ et (u_n) la suite de terme général

$$u_n = (1+a)(1+a^2)....(1+a^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1) Montrer que (u_n) est strictement croissante.
2) Soit (v_n) la suite de terme général

$$v_n = a + a^2 + ... + a^n.$$

a) Calculer (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Déduire que la suite (v_n) est majorée.
3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $1 + x \leq e^x$.
4) En déduire que

$$u_n \leq e^{v_n}.$$

5) Que peut-on conclure sur la convergence de (u_n) ?

Exercice 3. (6 Pts) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x|\ln(x)| & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de f sur $[0, +\infty[$.
2) Étudier la dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$.
3) Trouver tous les points $x \in [0, +\infty[$ vérifiant $f(x) = x$.

Exercice 4. (4 Pts).
Soient a, b, c des constantes réelles.
On pose

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x.$$

1) Vérifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$4a\alpha^3 + 3b\alpha^2 + 2c\alpha = a + b + c.$$

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2020/2021

$1^{ère}$ année M.I - Semestre 1

Corrigé de l'examen de rattrapage : Analyse 1

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (4 Pts).

Soit $(a,b) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ tel que $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$.
Supposons que $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. **(0.5 Pt)** Donc, $\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sqrt{a} + 3\sqrt{b} = \frac{p}{q}.(\mathbf{1Pt})$$

Alors,

$$(\sqrt{a} + 3\sqrt{b})^2 = \frac{p^2}{q^2} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

qui implique que

$$a + 9b + 6\sqrt{ab} = \frac{p^2}{q^2}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Ainsi,

$$\sqrt{ab} = \frac{\frac{p^2}{q^2} - a - 9b}{6} \in \mathbb{Q}, \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

ce qui est absurde.**(1 Pt)** Donc, $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2. (6 Pts).

1) Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + a^{n+1} > 0.$$

Donc, (u_n) est strictement croissante.**(1 Pt)**
2) On a $v_n = a + a^2 + ... + a^n$.
a) Nous remarquons que (v_n) est la somme d'une suite géométrique de premier terme a et de raison a.
Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad v_n = a\frac{1-a^n}{1-a}.(\mathbf{0.5Pt})$$

b) Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < a^n < 1 \Rightarrow 0 < 1 - a^n < 1.$$

Donc,

$$v_n \leq \frac{a}{1-a}.(\mathbf{0.5Pt})$$

Ainsi, (v_n) est majorée.
3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \to e^t$ est dérivable sur $[0,x]$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0,x[$ tel que

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^c. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Or $\quad 0 < c < x \Rightarrow 1 < e^c < e^x \Rightarrow \frac{e^x-1}{x} > 1 \Rightarrow e^x > 1 + x$.**(1 Pt)**
4) On a

$$1 + a^k \leq e^{a^k} \quad \forall k \geq 1.$$

Donc,

$$1+a \leq e^a$$
$$1+a^2 \leq e^{a^2}$$
$$.$$
$$.$$
$$1+a^n \leq e^{a^n}. \quad (\mathbf{1Pt})$$

Ainsi,

$$(1+a)(1+a^2)...(1+a^n) \leq e^a e^{a^2} ....e^{a^n}$$
$$\Rightarrow u_n \leq e^{a+a^2+...+a^n}$$
$$u_n \leq e^{v_n}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

5) Puisque (u_n) est majorée par $\frac{a}{1-a}$, alors

$$u_n \leq e^{v_n} \leq e^{\frac{a}{1-a}}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Ainsi, (u_n) est majorée. D'autre part, on sait que (u_n) est strictement croissante, donc (u_n) est convergente.(**0.5 Pt**)

Exercice 3. (6 Pts).

1) Nous remarquons que la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ puisque elle est la composée de deux fonctions continues. (Valeur absolue et le logarithme Népérien).(**0.5 Pt**)

En $x=0$,

$$\lim_{x\to 0^+} x|\ln(x)| = \lim_{x\to 0^+} -x\ln(x) = 0 = f(0). \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Donc, f est continue en 0.

2) Pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = -x\ln(x)$ est dérivable et pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f(x) = x\ln(x)$ est dérivable.(**0.5 Pt**)

Il reste à étudier la dérivablité en 0 et 1.

Pour $x=1$, on a

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x\ln(x)}{x-1} = 1(\mathbf{0.5Pt})$$

et

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x\ln(x)}{x-1} = -1(\mathbf{0.5Pt})$$

Donc, la fonction f n'est pas dérivable en 1.(**0.5 Pt**)

Pour $x=0$, on a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\ln(x)}{x} = +\infty \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Ainsi, la fonction f n'est pas dérivable en 0.(**0.5 Pt**)

3) Remarquons qu'on a $f(0)=0$.(**0.5 Pt**)

Dans $]0,1[$, on a

$$x = -x\ln(x) \Rightarrow -\ln(x) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{e} \in]0,1[. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Dans $]1,+\infty[$, on a

$$x = x\ln(x) \Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Ainsi, les solutions de $f(x)=x$ sont $\{0, e, \frac{1}{e}\}$.(**0.5 Pt**)

Exercice 4. (4 Pts).

1) La fonction f est un polynôme continu et dérivable sur $\mathbb{R}$.(**0.5 Pt**)

2) On a $f(0)=0$ et $f(1) = (a+b+c)-(a+b+c) = 0$. Donc $f(0)=f(1)$.(**1 Pt**)

D'autre part, la fonction f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. (**0.5 Pt**) Donc, par le théorème de Rolle, $\exists \alpha \in]0,1[$ telle que $f'(\alpha)=0$.(**1 Pt**)

Ainsi,

$$f'(\alpha) = 0 \Rightarrow 4a\alpha^3 + 3b\alpha^2 + 2c\alpha - (a+b+c) = 0. \quad (\mathbf{1Pt})$$