Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2020/2021
Durée : 01 h 30min
$1^{ère}$ Année LMD-MI

Examen final de Mécanique

EXERCICE : 1 (exercice du contrôle) 10 Pts

$1^{ère}$ partie : 07 Pts

Les coordonnées x et y d'un point mobile M dans le plan (oxy) varient avec le temps t selon les relations suivantes : $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 - t \end{cases}$

Trouver :

1. L'équation de la trajectoire.
2. Les composantes de la vitesse et son module v.
3. Les composantes de l'accélération et son module a.
4. La nature du mouvement
5. Les accélérations tangentielle $\overrightarrow{a_T}$ et normale $\overrightarrow{a_N}$
6. Le rayon de courbure R.

2^{eme} partie : 03 Pts

Le son émis par le fil d'une guitare se caractérise par sa **fréquence f.** Cette fréquence est en fonction de **la force F** de la tension du fil, de **la longueur L** et de **la masse volumique ρ** du fil.

Trouver l'expression de la fréquence f en la supposant de la forme

$$\mathbf{f = K\, F^a\, L^b\, \rho^c}$$

(Avec K une constante sans dimension et la dimension de la fréquence $\mathbf{[f]=T^{-1}}$).

EXERCICE 2 : 05 Pts

A. Soient les points A (+1,+1,+1), B (+2,+2,+1) et C (+2,+1,0)

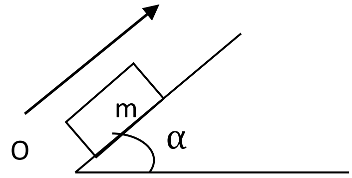
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ et le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

B. donnez les relations de passage entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes (x et y en fonction de ρ et θ et $\overrightarrow{u_\rho}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$)

EXERCICE 3: 05 Pts

Un bloc de masse m remonte le long d'un plan incliné d'un angle α, par rapport à l'horizontale, avec une vitesse initiale v_0, et un coefficient de frottement f_d.

1- Déterminer jusqu'à quelle distance le bloc se déplace avant de s'arrêter.
2- Quelle est la condition pour que le corps puisse redescendre.



Bon courage

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2020/2021
Durée : 01 h 30min
1ère Année LMD-MI

Corrigé de l'Examen final de Mécanique

(EXERCICE DU CONTROLE) :10 Pts

1ère partie : 07 Pts

Les coordonnées x et y d'un point mobile M dans le plan (oxy) varient avec le temps t selon les relations suivantes : $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 - t \end{cases}$

1- L'équation de la trajectoire s'écrit alors

Ici, on va écrire t en fonction, de x : $t=x$ (0,5 pts)

donc $y = (x)^2 - (x) = \boldsymbol{x^2 - x}$

L'équation de la trajectoire est $\mathbf{y(x) = x^2 - x}$ (0,5 pts)

2- Les composantes de la vitesse

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 1 \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 2t - 1 \end{cases}$$ (0,5 pts)

La vitesse s'écrit $\overrightarrow{\mathbf{v(t)}} = \vec{\mathbf{i}} + (2t - 1)\vec{\mathbf{j}}$ **,**

Le module de la vitesse $|\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + (2t - 1)^2} = \sqrt{4t^2 - 4t + 2}$ (0,5 pts)

3- Les composantes de l'accélération

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = 2 \end{cases}$$ (0,5 pts)

L'accélération s'écrit $\overrightarrow{\mathbf{a(t)}} = \mathbf{2}\vec{\mathbf{j}}$ **;** Le module de l'accélération $|\vec{a}(t)| = 2$ (0,5 pts)

4- La nature du movement

$\overrightarrow{a(t)}.\overrightarrow{v(t)} = 1(0) + 2(2t - 1) = 4t - 2$

Le mouvement dans ce cas est uniformément variable

- Il est accéléré pour t> $\frac{1}{2}$ (0,5 pts) et il est décéléré (retardé) pour t< $\frac{1}{2}$ (0,5 pts)

5- les accélérations normales et tangentielles

-L'accélération tangentielle

$a_T = \frac{d|\overrightarrow{v(t)}|}{dt}$ (0,5 pts) avec $|\overrightarrow{v(t)}| = \sqrt{4t^2 - 4t + 2}$ donc $a_T = \frac{d(\sqrt{4t^2-4t+2})}{dt} = \frac{8t-4}{2\sqrt{4t^2-4t+2}}$

$a_T = \frac{4t-2}{\sqrt{4t^2-4t+2}} = \frac{4t-2}{v}$ (0,5 pts)

-L'accélération normale

Les accélérations a_N et a_T sont les composantes normales et tangentielles de l'accélération $\vec{a}$

$(\vec{a} = a_T\overrightarrow{U_T} + a_N\overrightarrow{U_N}) \Rightarrow a^2 = a_T^2 + a_N^2$ Donc $a_N^2 = a^2 - a_T^2$ (0,5 pts)

$$a_N^2 = 4 - \left(\frac{4t-2}{\sqrt{4t^2-4t+2}}\right)^2 = 4 - \frac{16\,t^2 - 16\,t + 4}{4t^2-4t+2} \Rightarrow a_N^2 = \frac{4}{4t^2-4t+2}$$

Donc $a_N = \frac{2}{\sqrt{4t^2-4t+2}} = \frac{2}{v}$ (0,5 pts)

6- Le rayon de courbure

$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{2}{v}$ (0,5 pts) $\Rightarrow R = \frac{v^3}{2} = \frac{(4t^2-4t+2)^{\frac{3}{2}}}{2}$ (0,5 pts)

2eme partie : 03 Pts

Le son émis par le fil d'une guitare se caractérise par sa **fréquence f.** **f=K F^a L^b ρ^c** Avec K une constante sans dimension, **F : une force, L: une longueur et ρ: la masse volumique**.

f=K F^a L^b ρ^c ; Cette fonction est homogène donc $[f] = [k][F]^a[L]^b[\rho]^c$ (0,25 pts)

$$\text{Avec} \begin{cases} [F] = MLT^{-2} \\ [L] = L \quad et \ \ [k] = 1 \\ [\rho] = ML^{-3} \\ [f] = T^{-1} \end{cases} \text{(01 pt)}$$

Donc $[f] = (MLT^{-2})^a(L)^b(ML^{-3})^c = M^{a+c}L^{a+b-3c}T^{-2a} = M^0L^0T^{-1}$ (0,5 pts)

$$\Longrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ a + b - 3c = 0 \\ -2a = -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -a + 3c = -\frac{4}{2} = -2 \ \text{(0,75 pts)} \\ c = -a = -1/2 \end{cases}$$

f=K F$^{1/2}$ L^{-2} ρ$^{-1/2}$ donc $f = k\frac{\sqrt{F}}{L^2\sqrt{\rho}}$ (0,5 pts)

EXERCICE 2 : 05 Pts

A. Soient les points A (+1,+1,+1), B (+2,+2,+1) et C (+2,+1,0) (**02 Pts)**

Le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{(0,25 pts)} et \ \ \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2-2 \\ 1-2 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{(0,25 pts)}$$

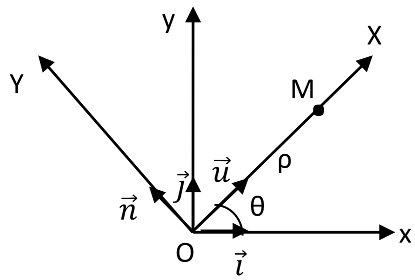
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -1$ (0,5 pts)

Le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ avec $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-1\\1-1\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ (0,25 pts)

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{matrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{matrix} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$$ (07,5 pts)

B. Les relations de passage entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes (x et y en fonction de ρ et θ et $\overrightarrow{u_\rho}$et $\overrightarrow{u_\theta}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$) **(<u>03 Pts)</u>**

1. La relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires.
$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}$ (01 pt)



2. L'expression des vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_r}$ *et* $\overrightarrow{U_\theta}$ en fonction des vecteurs unitaires$\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$.

$\overrightarrow{OM}/pol = \rho\vec{U}_r$ (0,5 pts)

$\overrightarrow{OM}/cart = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath} = \rho(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath})$ (0,5 pts)

Par identification $\begin{cases} \overrightarrow{U_r} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{U_\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} \end{cases}$ (01 pt)

<u>EXERCICE 3: 05 Pts</u>

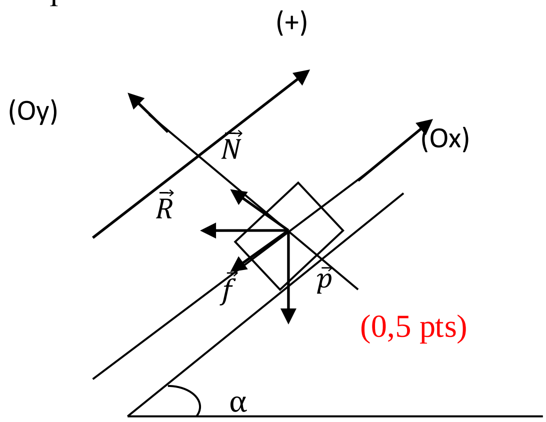
Un bloc de masse m remonte le long d'un plan incliné d'un angle α, par rapport à l'horizontale, avec une vitesse initiale v_0, et un coefficient de frottement f_d.

1- Déterminons jusqu'à quelle distance le bloc se déplace avant de s'arrêter.

A t=0 ,v=v_0 et μ=f_d

D'après le principe fondamental de la dynamique

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \vec{R} = \vec{p} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a}$ (0,5 pts)



(0,5 pts)

La vitesse initiale v_i= v_0 et la vitesse finale v_f=0

(le corps va s'arrêter)

Nous avons $v_f^2 - v_i^2 = 2al$ (0,25 pts) (l étant la distance parcourue par le corps)

Donc $a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2l}$

Il faut choisir le repère, tel que l'axe (Ox) est suivant l'axe du mouvement, Donc il est parallèle à $\vec{f}$ et (Oy) est perpendiculaire à (Ox) donc parallèle à $\vec{N}$

Suivant (Ox) $-$ f- p_x= -f-m g sinα=ma (0,5 pts)

Suivant (Oy) N-p_y=0⇒N=m g cosα (0,5 pts)

f_d=tgφ=f/N ⇒f=N tg φ (0,25 pts) donc f= f_d m g cosα (0,25 pts)

- f_d m g cosα -m g sinα=ma ⇒ -f_d g cosα - g sinα=$\frac{v_f^2 - v_i^2}{2l}$

Donc $l = \frac{-v_i^2}{2(-f_d\ g\cos\alpha - g\sin\alpha)} = \frac{v_0^2}{2g(f_d\ \cos\alpha + \sin\alpha)}$ (0,25 pts)

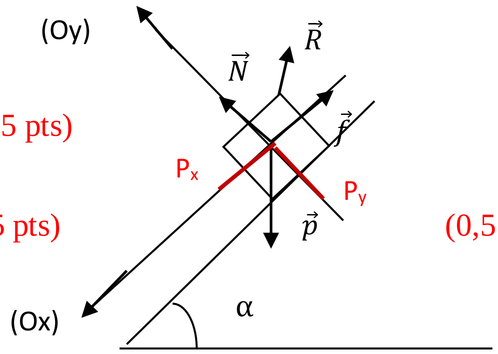
2- La condition pour que le corps puisse redescendre.

-A l'équilibre

Suivant (Ox) -f+ p_x=0⇒ f=m g sinα (0,5 pts)

Suivant (Oy) N-p_y=0⇒N=m g cosα(0,5 pts)

Pour que le corps puisse redescendre,



(0,5 pts)

p_x>f ⇒ m g sinα>N f_s (0,5 pts)