Université de Tlemcen
Département de Mathématiques

A.U.2019/2020

Controle continu
de
Introduction aux problèmes hyperboliques

Exercice 1

1. Vérifier si le système suivant est hyperbolique

$$\left\{ \begin{array}{c} u_t + u_x - v_x = f(x,t) \\ v_t + 2u_x = g(x,t) \end{array} \right. , \tag{1}$$

2. Résolution de(1)dans le cas où $f = g = 0$.

3. Comment déterminer la solution dans le cas où f et g sont non nulles.

Exercice 2
On considère le problème de Cauchy suivant

$$\left\{ \begin{array}{c} u_t + \left(\frac{u(2-u)}{2}\right)_x = 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) \end{array} \right. \tag{2}$$

où $u_0(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x < 1 \\ 0 & \text{si} & x > 1 \end{array} \right.$

1. Donner la définition de solution faible de(2) .

2. Représenter les caracteristiques de(2)

3. Donner une solution faible entropique de (2). Est elle unique?

4. Représenter la solution trouvée aux temps $t = 0$, $t = 0.5$ et $t = 1$

Exercice3
En utilisant la méthode des caractéristiques, donner une solution faible du problème (3) en précisant le temps maximal d'existence de la solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{array} \right. ; \tag{3}$$

où $u_0(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -a(1-e^x) & \text{si} & x < 0 \\ -a(1-e^{-x}) & \text{si} & x > 0 \end{array} \right. ; a > 0.$

Université de Tlemcen
Département de Mathématiques A.U.2019/2020

Corrigé du Controle continu
de
Introduction aux problèmes hyperboliques

Exercice 1
Le système linéaire non homogène

$$\left\{ \begin{array}{c} u_t + u_x - v_x = f(x,t) \\ v_t - 2u_x = g(x,t) \end{array} \right. , \tag{1}$$

s'écrit sous forme

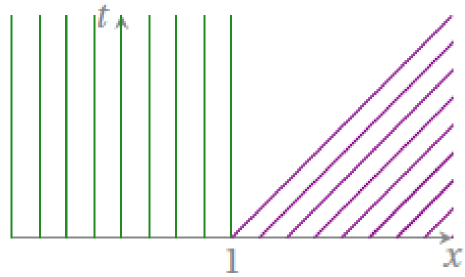
$$U_t + AU_x = F \tag{2}$$

où $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $F(x,t) = \begin{pmatrix} f(x,t) \\ g(x,t) \end{pmatrix}$

1. Le système est stictement hyperbolique car les valeurs propres de A sont réelles distinctes :
$$\lambda_1 = -1 < \lambda_2 = 2.$$

2. Résolution de(1)dans le cas où $f = g = 0$
Vecteurs propres: $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$.
En opérant le changement $U = PV \Longleftrightarrow V = P^{-1}U$,le système est découplé et s'écrit
$$V_t + DV_x = 0 \tag{3}$$
où
$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
on obtient alors $V(x,t) = \begin{pmatrix} g_1(x+t) \\ g_2(x-2t) \end{pmatrix}$;avec g_k fct de classe C^1. Et $U(x,t) = \begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x+t) + g_2(x-2t) \\ 2g_1(x+t) - g_2(x-2t) \end{pmatrix}$

3. Dans le cas où f et g sont non nulles, le système découplé s'écrit:
$$V_t + DV_x = P^{-1}F = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}f + \frac{1}{3}g \\ \frac{2}{3}f - \frac{1}{3}g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$
càd $V_t^k + \lambda_k V_x^k = h_k$ avec $k = 1, 2$
si on pose z=V^k le système caracteristique associé est alors



$$\left\{\begin{array}{c} \frac{dx}{dt} = \lambda_k \\ \frac{dz}{dt} = h_k\left(x,t\right) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \lambda_k t + c_1 ......(1) \\ \frac{dz}{dt} = h_k\left(\lambda_k t + c_1, t\right) ....(2) \end{array}\right. ,$$

la connaissance des h$_k$ permettra de définir explicitement les caractéristiques et exprimer z en intégrant (2).

<u>**Exercice 2**</u>

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\left\{\begin{array}{c} u_t + \left(\frac{u(2-u)}{2}\right)_x = 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u\left(x,0\right) = u_0(x) \end{array}\right. \tag{5}$$

où $u_0(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 1 & \text{si} & x < 1 \\ 0 & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$

1. On a $f(u) = \frac{u(2-u)}{2} \Longrightarrow f'(u) = 1-u \Longrightarrow f''(u) = -1$(le flux est concave). L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est donnée par

$$x(t) = \xi + f'(u_0\left(\xi\right))t$$

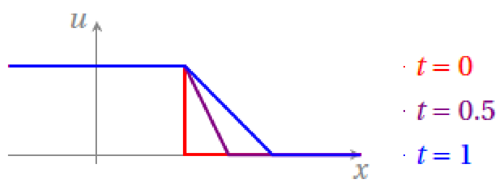
l'expression de u_0 permet d'obtenir :

$$x(t) = \left\{\begin{array}{cc} \xi & \text{si } \xi < 1 \\ \xi + t & \text{si } \xi > 1 \end{array}\right.$$

La donnée initiale du problème de Riemann a un saut décroissant et le flux est concave donc l'unique solution entropique présente une onde de raréfaction centrée en (1, 0)

La solution est donc

$$u(x,t) = \left\{\begin{array}{ccc} 1 & \text{si} & x \leq 1, \\ 1 - \frac{x-1}{t} & \text{si} & 1 < x \leq 1+t \\ 0 & \text{si} & x > 1+t \end{array}\right.$$



Exercice3

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} ; \tag{6}$$

où $u_0(x) = h(x) = \begin{cases} -a\left(1-e^{x}\right) & \text{si} \quad x<0 \\ -a\left(1-e^{-x}\right) & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$; $a>0$.

Système caractéristique en posant z =u(x,t)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = z^2 \\ \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases} ,$$

La donnée initiale permet d'obtenir la relation

$\begin{cases} z = cste = h(\xi) \\ x = h(\xi)^2 t + \xi \end{cases}$

Et la solution vérifie alors

$$u = h\left(x - u^2 t\right) \tag{7}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est donnée par

$$x(t) = \xi + (h(\xi))^2 t$$

La dérivée de u_0 est discontinue, la solution cherchée ne peut etre classique.

Deux caractéristiques $\begin{cases} x = \xi_1 + h^2(\xi_1)\, t \\ x = \xi_2 + h^2(\xi_2)\, t \end{cases}$,se coupent en un point (x,t) avec

$$t = \frac{\xi_1 - \xi_2}{h^2(\xi_2) - h^2(\xi_1)}$$

De 7 on a

$$u_x = \frac{h'(\xi)}{1 + 2h(\xi)\, h'(\xi)\, t}$$

donc si $2h(\xi)\, h'(\xi) < 0$ u_x devient ∞ à un temps

$$t = \frac{-1}{2h(\xi)\, h'(\xi)}$$

la valeur la plus petite de t correspond à $\xi = \xi_0$où $h\left(\xi\right)h'\left(\xi\right)$ admet un minimum

Calcul du minimum de $F\left(\xi\right)$=$h\left(\xi\right)h'\left(\xi\right)$

$$F\left(\xi\right) = \left\{ \begin{array}{c} -2a^2(1-e^{\xi})e^{\xi} \text{ si } \xi < 0 \\ 2a^2(1-e^{-\xi})e^{-\xi} \text{ si } \xi > 0 \end{array} \right.$$

.

$F'\left(\xi\right) = \left\{ \begin{array}{c} -2a^2(1-2e^{\xi})e^{\xi} \text{ si } \xi < 0 \\ 2a^2(1-2e^{-\xi})e^{-\xi} \text{ si } \xi > 0 \end{array} \right.$

$F'\left(\xi\right) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \xi = -\ln 2 \text{ si } \xi < 0 \\ \xi = \ln 2 \text{ si } \xi > 0 \end{array} \right.$

$F\left(\ln\frac{1}{2}\right) = -\frac{a^2}{2}$ si $\xi < 0$ et $F\left(\ln 2\right) = \frac{a^2}{2}$ si $\xi > 0$

$$t = \frac{-1}{\min\left(2h\left(\xi\right)h'\left(\xi\right)\right)} = \frac{2}{a^2}$$