Université Abou Bakr Belkaid - Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de mathématiques
Durée : 1h30

Analyse Fonctionnelle II- Master I Probabilités-Statistiques.
Année universitaire : 2019-2020

Éxamen Final

Exercice 1 : Inégalité de Hardy (08 points)

Soit $p \in]1, +\infty[$. A toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ on associe la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+_*$ par

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

1. Montrer que F est bien définie.
2. On suppose que $f \in C_c(\mathbb{R}^+_*, \mathbb{R}^+)$ (fonction continue positive sur $\mathbb{R}^+$, à support compact).
   — Montrer que
   $$\int_0^{+\infty} F(x)^p\,dx = -p\int_0^{+\infty} xF(x)^{p-1}F'(x)\,dx.$$
   — Montrer que
   $$\int_0^{+\infty} F(x)^p\,dx = \frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty} F(x)^{p-1}f(x)\,dx.$$
3. En déduire l'inégalité de Hardy pour $f \in C_c(\mathbb{R}^+_*, \mathbb{R}^+)$:
   $$\left\|F\right\|_p \leq \frac{p}{p-1}\left\|f\right\|_p.$$
4. Montrer que l'inégalité reste vraie pour une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ à support compact.

Exercice 2 : (06 points)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctions définies par

$$f_n(x) = \sqrt{n}\chi_{[n,n+\frac{1}{n}]}(x)$$

1. Montrer que f_n converge faiblement vers 0 dans $L^2([0, +\infty[)$ mais ne converge pas fortement dans $L^2([0, +\infty[)$.
2. Montrer que f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0, +\infty[)$ pour $p < 2$.

<u>Exercice 3 :</u> (06 points) *Inégalité d'interpolation* :

Soit $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Montrer que $f \in L^r(\Omega)$, pour tout $r \in [p, q]$ et que

$$\left\|f\right\|_r \leq \left\|f\right\|_p^{\alpha} \left\|f\right\|_q^{1-\alpha}$$

Où α satisfait

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \qquad\qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

<u>Exercice</u> (Contrôle continu) (10 points) :

1. Soit $f \in L^q(\Omega)$, montrer que

$$\int_{\Omega} |f(t)|^q \, dt = q \int_0^{+\infty} t^{q-1} \varphi_f(t) \, dt.$$

Où

$$\varphi_f(k) = \left|\left\{x \in \Omega : |f(x)| > k\right\}\right|, \ k > 0.$$

2. Soit $(f_n)_n$ une suite dans $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$ converge faiblement vers f pour la topologie $\sigma(L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega))$ et h_n converge fortement vers h dans $L^{p'}(\Omega)$, montrer que

$$\left\langle f_n, h_n \right\rangle \longrightarrow \left\langle f, h \right\rangle$$

Bonne chance.

Université Abou Bakr Belkaid - Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de mathématiques

Analyse Fonctionnelle I- Master 1 Probabilités-Statistiques.
Année universitaire : 2019-2020

Correction de l'Éxamen final

<u>Exercice 1 :</u> Inégalité de Hardy **(08 points) :**

Soit $p \in]1, +\infty[$. A toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ on associe la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+_*$ par

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

1. Montrer que F est bien définie. Au voisinage de 0, la fonction F est finie, et au voisinage de $+\infty$ alors F aussi et finie et tend vers 0, et si $x \in]\epsilon, +\infty[$ la fonction F est bien définie, et on a

$$|F(x)| = |\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt| \leq |\frac{1}{x}|\Big(\int_0^x |f(t)|^p\,dt\Big)^{\frac{1}{p}} x^{\frac{1}{p}'} \leq \frac{C}{x^{1-\frac{1}{p'}}} < \infty, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+_* ... \qquad \text{(01 point).}$$

2. On suppose que $f \in C_c(\mathbb{R}^+_*, \mathbb{R}^+)$ (fonction continue positive sur $\mathbb{R}^+$, à support compact).
   — Montrer que
$$\int_0^{+\infty} F(x)^p\,dx = -p\int_0^{+\infty} xF(x)^{p-1}F'(x)\,dx.... \qquad \text{(02 points).} \tag{1}$$
   (Il suffit d'utiliser l'intégration par partie, avec le fait que f à support compact).
   — Montrer que
$$\int_0^{+\infty} F(x)^p\,dx = \frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty} F(x)^{p-1}f(x)\,dx.... \qquad \text{(02 points)}$$
   Il suffit de remarquer que : $(xF(x))' = \big(\int_0^x f(t)\,dt\big)'$, alors $xF'(x) = -F(x) + f(x)$ en remplaçant dans la formule (1), on aura
$$\int_0^{+\infty} F(x)^p\,dx = -p\int_0^{+\infty} F(x)^{p-1}(-F(x)+f(x))\,dx = p\int_0^{+\infty} F(x)^p\,dx - p\int_0^{+\infty} F(x)^{p-1}f(x)\,dx.$$
   D'où le résultat.

3. En déduire l'inégalité de Hardy pour $f \in C_c(\mathbb{R}^+_*, \mathbb{R}^+)$:

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

   En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p\,dx = \frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty} F(x)^{p-1}f(x)\,dx \leq \frac{p}{p-1}\big(\int_0^{+\infty} F(x)^p\big)^{\frac{p-1}{p}}\big(\int_0^{+\infty} f(x)^p\big)^{\frac{1}{p}}.$$

   Alors

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p...... \qquad \text{(02 points)}$$

4. Montrer que l'inégalité reste vraie pour une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ à support compact. Meme si f n'est pas positif, il suffit de considérer

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\, dt.$$

De la question précedente, pour tout $H \in L^p(]0, +\infty[)$, on a

$$\|H\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$$

Et comme $|F(x)| \leq H$ pour tout $x > 0$ on a

$$\|F\|_p \leq \|H\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(01 point)}$$

<u>Exercice 2</u> : **(06 points) :**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctions définies par

$$f_n(x) = \sqrt{n}\chi_{[n, n+\frac{1}{n}]}(x)$$

1. Quelque soit g continue à support compact,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)g(x)\, dx = \sqrt{n}\int_n^{n+\frac{1}{n}} g(x)\, dx \to 0 \qquad n \to \infty \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(02 points)}$$

Par densité des fonctions continue a support compact, f_n converge faiblement vers 0. Comme f_n converge presque partout vers 0 on conclut que f_n ne converge par fortement vers 0 dans $L^2([0, +\infty[)$ car

$$\|f_n\|_2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(02 points)}$$

2. Pour $p < 2$, on a

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|^p\, dx = \int_n^{n+\frac{1}{n}} n^{\frac{p}{2}}\, dx = n^{\frac{p}{2}-1} \to 0 \qquad n \to \infty \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(02 points)}$$

Donc f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0, +\infty[)$

<u>Exercice 3 :</u> (06 points) : *Inégalité d'interpolation* :

Soit $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Montrer que $f \in L^r(\Omega)$, pour tout $r \in [p,q]$ et que

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{1-\alpha}$$

Où α satisfait

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \qquad\qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Par l'utilisation de l'inégalité de Hölder (avec $r\alpha < p$) :

$$\|f\|_r^r = \int_\Omega |f(x)|^r\,dx = \int_\Omega |f(x)|^{r(1-\alpha)}|f(x)|^{r\alpha}\,dx \leq \Big(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{r\alpha}{p}} \Big(\int_\Omega |f(x)|^{r(1-\alpha)\frac{p}{p-r\alpha}}\,dx\Big)^{\frac{p-r\alpha}{p}}.\text{(02 points)}$$

a condition que $r(1-\alpha)\frac{p}{p-r\alpha} \leq q$ ce qui est vrai, pour $r\alpha < p$ et $0 \leq \alpha \leq 1$ on applique a nouveau l'inégalité de Hölder, ... (02 points), on obtient avec

$$\|f\|_r^r = \int_\Omega |f(x)|^r\,dx \leq \|f\|_p^{r\alpha}\Big(\int_\Omega |f(x)|^q\,dx\Big)^{\frac{p-r\alpha}{p}\frac{pr(1-\alpha)}{q(p-r\alpha)}} \leq \|f\|_p^{r\alpha}\Big(\int_\Omega |f(x)|^q\,dx\Big)^{\frac{r(1-\alpha)}{q}} \leq \|f\|_p^{r\alpha}\|f\|_q^{r(1-\alpha)}.$$

Alors

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha}\|f\|_q^{1-\alpha}\text{.............} \qquad \text{(02 points)}$$

Correction du Contrôle continu.

<u>Exercice</u> (Contrôle continu) **(10 points)** :

1. Soit $f \in L^q(\Omega)$, pour $q \geq 1$ montrer que

$$\int_\Omega |f(t)|^q\,dt = q\int_0^{+\infty} t^{q-1}\varphi_f(t)\,dt\text{......} \qquad \text{...\textbf{(06 points)}}$$

Où

$$\varphi_f(k) = \Big|\{x \in \Omega : |f(x)| > k\}\Big|,\ k > 0.$$

On commence par le cas $q = 1$, soit

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

Alors

$$H(|f(x)|-k)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad |f(x)|>k \\ 0 & \text{si} \quad |f(x)|<k \end{cases}$$

On pose $g(x)=|f(x)|^q$ alors $g\in L^1(\Omega)$ et

$$\varphi_g(k)=\Big|\{x\in\Omega:|g(x)|>k\}\Big|=\Big|\{x\in\Omega:|f(x)|^q>k\}\Big|=\Big|\{x\in\Omega:|f(x)|>k^{\frac{1}{q}}\}\Big|.$$

Alors $\varphi_g(k)=\varphi_f(k^{\frac{1}{q}})$.................. (01 points).
D'autre part,

$$\int_\Omega |g(x)|\,dx=\int_\Omega \varphi_f(k^{\frac{1}{q}})\,dk.$$

$$\int_0^{+\infty}\varphi_f(k)\,dk=\int_0^{+\infty}\int_\Omega H(|f(x)|-k)\,dx\,dk$$

En utilisant Fubini on obient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\varphi_f(k)\,dx &= \int_\Omega\int_0^{+\infty}H(|f(x)|-k)\,dk\,dx\\ &= \int_\Omega\int_{|f(x)|>k}\chi(x)\,dk\,dx\\ &= \int_\Omega\int_0^{|f(x)|>k}dk\,dx=\int_\Omega|f(x)|\,dx\end{aligned}$$

Alors, $\int_\Omega |f(x)|\,dx=\int_0^{+\infty}\varphi_f(k)\,dk$............................ (03 points)
On considere maintenant le cas $q>1$ On pose $t=k^{\frac{1}{q}}$ alors $k=t^q$ et $dk=qt^{q-1}dt$, de sorte que :

$$\int_\Omega |f(t)|^q\,dt=q\int_0^{+\infty}t^{q-1}\varphi_f(t)\,dt\text{...........................} \qquad \text{(02 points)}$$

2. Soit $(f_n)_n$ une suite dans $L^p(\Omega)$ avec $1<p<\infty$ converge faiblement vers f pour la topologie $\sigma(L^p(\Omega),L^{p'}(\Omega))$ et h_n converge fortement vers h dans $L^{p'}(\Omega)$, montrer que

$$\langle f_n,h_n\rangle\longrightarrow\langle f,h\rangle \qquad \text{..........}\textbf{(04 points) :}$$

Notons que

$$\langle f_n,h_n\rangle=\int_\Omega f_n(x)h_n(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}|\langle f_n,h_n\rangle-\langle f,h\rangle| &= |\langle f_n,h_n\rangle-\langle f,h\rangle-\langle f_n,h\rangle+\langle f_n,h\rangle|\le|\langle f_n,h_n-h\rangle|+|\langle f_n-f,h\rangle|\\ &\le \|f_n\|_p\|h_n-h\|_{p'}+|\langle f_n-f,h\rangle|\text{..................} \qquad \text{(02 points)}\end{aligned}$$

Or $h_n\longrightarrow h$ dans $L^{p'}(\Omega)$ et $f_n\rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)\Longleftrightarrow\langle f_n,h\rangle\longrightarrow\langle f,h\rangle$.
Alors

$$\langle f_n,h_n\rangle\longrightarrow\langle f,h\rangle\text{......................} \qquad \text{(02 points)}$$

Bonne chance.