Département de Mathématiques 2019/2020
Master 1 Probabilités et Statistiques
Module: Analyse numérique

Corrigé du contrôle continu

Exercice 1 (**sur 7 points**)
On considère l'équation différentielle sur un intervalle $[0, T]$,

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad y(0) = y_0$$

où f est une fonction de classe C^2 sur $[0, T] \times \mathbb{R}$, L_lipschitzienne par rapport à y uniformément par rapport à t.
On définit le schéma numérique suivant:

$$y_{n+1} = \alpha y^a_{n+1} + \beta y^b_{n+1}$$

où

$$y^a_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

et

$$y^b_{n+1} = y_n + \gamma hf(t_n, y_n) + (1-\gamma)\, hf(t_n + \gamma h, y_n + \gamma hf(t_n, y_n))$$

avec

$$\alpha + \beta = 1 \text{ et } \gamma \in [0, 1]\,.$$

1. Ecrire le schéma sous la forme $y_{n+1} = y_n + hF(t_n, y_n, h)$ en explicitant $F(t, y, h)$.
2. Montrer que ce schéma est stable.
3. Montrer que ce schéma est consistant d'ordre 1.
4. Donner une condition sur β et γ pour que le schéma soit d'ordre 2.
5. Exprimer cette condition dans le cas où $\gamma = \frac{1}{2}$ et expliciter $F(t, y, h)$. Que retrouve-t-on?

Solution
1. En remplaçant y^a_{n+1} et y^b_{n+1} par leur expressions dans le schéma numérique nous obtenons

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(\alpha + \beta\gamma)\, f(t_n, y_n) + (1-\gamma)\, \beta f(t_n + \gamma h, y_n + \gamma hf(t_n, y_n))\right]$$

et donc

$$y_{n+1} = y_n + hF(t_n, y_n, h)$$

avec

$$F(t, y, h) = (\alpha + \beta\gamma)\, f(t, y) + (1-\gamma)\, \beta f(t + \gamma h, y + \gamma hf(t, y))$$

2. On a

$$\begin{aligned}
& |F(t, y, h) - F(t, z, h)| \\
\leq\ & |\alpha + \beta\gamma|\, |f(t, y) - f(t, z)| + (1-\gamma)\, |\beta|\, |f(t + \gamma h, y + \gamma hf(t, y)) - f(t + \gamma h, z + \gamma hf(t, z))| \\
\leq\ & |\alpha + \beta\gamma|\, L\, |y - z| + (1-\gamma)\, |\beta|\, L\, |y + \gamma hf(t, y)) - (z + \gamma hf(t, z))| \\
\leq\ & (|\alpha + \beta\gamma| + (1-\gamma)\, |\beta|)\, L\, |y - z| + (1-\gamma)\, \gamma\, |\beta|\, L^2 h\, |y - z| \\
\leq\ & \left(|\alpha + \beta\gamma|\, L + (1-\gamma)\, |\beta|\, L + (1-\gamma)\, \gamma\, |\beta|\, L^2 T\right) |y - z|
\end{aligned}$$

Il s'en suit que $F(t,y,h)$ est lipschitzienne par rapport à y uniformement par rapport à t et h. Donc schéma est stable.
3. Comme

$$\begin{aligned} F(t,y,0) &= (\alpha+\beta\gamma) f(t,y) + (1-\gamma)\beta f(t,y) \\ &= f(t,y) \end{aligned}$$

alors la méthode est consistante d'ordre au moins 1.
4.

$$\frac{\partial F}{\partial h}(t,y,h) = (1-\gamma)\beta\gamma\frac{\partial f}{\partial t}(t+\gamma h, y+\gamma h f(t,y)) + (1-\gamma)\beta\gamma f(t,y)\frac{\partial f}{\partial y}(t+\gamma h, y+\gamma h f(t,y))$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial h}(t,y,0) &= (1-\gamma)\beta\gamma\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + (1-\gamma)\beta\gamma f(t,y)\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \\ &= (1-\gamma)\beta\gamma\left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + f(t,y)\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right] \\ &= (1-\gamma)\beta\gamma f^{[1]}(t,y) \end{aligned}$$

Pour que le schéma soit d'odre au moins 2, il faut et il suffit que

$$(1-\gamma)\beta\gamma = \frac{1}{2}$$

Si $\gamma = 0$ ou $\gamma = 1$ la condition n'est pas satisfaite
Notons aussi que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial h^2}(t,y,h) &= (1-\gamma)\beta\gamma^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t+\gamma h, y+\gamma h f(t,y)) + 2(1-\gamma)\beta\gamma^2 f(t,y)\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial y}(t+\gamma h, y+\gamma h f(t,y)) \\ &\quad + (1-\gamma)\beta\gamma^2(f(t,y))^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t+\gamma h, y+\gamma h f(t,y)) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial h^2}(t,y,0) &= (1-\gamma)\beta\gamma^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,y) + 2(1-\gamma)\beta\gamma^2 f(t,y)\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial y}(t,y) + (1-\gamma)\beta\gamma^2(f(t,y))^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,y) \\ &\neq \frac{1}{3}f^{[2]}(t,y) \end{aligned}$$

Le schéma n'est pas d'ordre 3.
Donc la condition sur β et γ pour que le schéma soit d'ordre 2 est

$$\beta = \frac{1}{2(1-\gamma)\gamma}, 0 < \gamma < 1$$

5. Si $\gamma = \frac{1}{2}$ alors $\beta = 2$ et $\alpha = -1$, dans ce cas le schéma s'écrit:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(t_n, y_n))$$

Nous retrouvons le schéma d'Euler modifié.

Exercice 2 (**sur 7 points**)

On considère le tableau de Butcher

$$\begin{array}{c|cc} (3\text{-}\sqrt{3})/6 & 1/4 & (3\text{-}2\sqrt{3})/12 \\ (3\text{+}\sqrt{3})/6 & (3\text{+}2\sqrt{3})/12 & 1/4 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \tag{1}$$

1. Ecrire explicitement le schéma associé au tableau de Butcher (1).
2. Déterminer la région de la stabilité absolue de la méthode.

Corrigé

1. on a

$$t_{n,1} = t_n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}h \text{ et } t_{n,2} = t_n + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h$$

$$\begin{aligned} y_{n,1} &= y_n + \frac{1}{4}hf(t_{n,1}y_{n,1}) + \frac{3-2\sqrt{3}}{12}hf(t_{n,2}, y_{n,2}) \\ y_{n,2} &= y_n + \frac{3+2\sqrt{3}}{12}hf(t_{n,1}y_{n,1}) + \frac{1}{4}hf(t_{n,2}, y_{n,2}) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_{n,1}y_{n,1}) + f(t_{n,2}, y_{n,2})\right) \end{aligned}$$

Que l'on écrit aussi

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}h, y_n + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3-2\sqrt{3}}{12}k_2\right)\right) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h, y_n + h\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{12}k_1 + \frac{1}{4}k_2\right)\right) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

2. En prenant $f(t, y) = \lambda y,\ \ \lambda \in \mathbb{C}$, les équations définissant $k_1$et k_2 s'écrivent

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda h}{4}\right) k_1 - \frac{3-2\sqrt{3}}{12}\lambda h k_2 = \lambda y_n \\ -\frac{3+2\sqrt{3}}{12}\lambda h k_1 + \left(1 - \frac{\lambda h}{4}\right) k_2 = \lambda y_n \end{cases}$$

Les solutions sont

$$k_1 = \frac{12\lambda - 2\sqrt{3}h\lambda^2}{h^2\lambda^2 - 6h\lambda + 12}y_n \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{12\lambda + 2\sqrt{3}h\lambda^2}{h^2\lambda^2 - 6h\lambda + 12}y_n$$

alors

$$y_{n+1} = \left[1 + \frac{6\lambda h - \sqrt{3}h^2\lambda^2}{h^2\lambda^2 - 6h\lambda + 12} + \frac{6\lambda h + \sqrt{3}h^2\lambda^2}{h^2\lambda^2 - 6h\lambda + 12}\right] y_n$$

et donc

$$y_{n+1} = \left[\frac{h^2\lambda^2 + 6h\lambda + 12}{h^2\lambda^2 - 6h\lambda + 12}\right] y_n$$

En posant $z = \lambda h$ alors

$$y_n = \left(\frac{z^2 + 6z + 12}{z^2 - 6z + 12}\right)^n y_0$$

$$\text{La suite } y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \left|\frac{z^2 + 6z + 12}{z^2 - 6z + 12}\right| < 1$$

Ce qui revient

$$\left|z^2 + 6z + 12\right| < \left|z^2 - 6z + 12\right|$$

Comme

$$\begin{aligned} \left|z^2 + 6z + 12\right|^2 &= \left(x^2 - y^2 + 12 - 6x\right)^2 + (-2xy + 6y)^2 \\ &= \left(x^2 - y^2 + 12\right)^2 + (6x)^2 + 12x\left(x^2 - y^2 + 12\right) + (-2xy + 6y)^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\left|z^2 - 6z + 12\right|^2 \\ = &\left(x^2 - y^2 + 12 - 6x\right)^2 + (-2xy - 6y)^2 \\ = &\left(x^2 - y^2 + 12\right)^2 + (6x)^2 - 12x\left(x^2 - y^2 + 12\right) + (-2xy - 6y)^2 \end{aligned}$$

alors

$$\left|z^2 + 6z + 12\right|^2 < \left|z^2 - 6z + 12\right|^2$$

est équivalent à

$$24x\left(x^2 - y^2 + 12\right) + 24xy^2 < 0$$

ce qui implique

$$24x\left(x^2 + 12\right) < 0$$

ou

$$x < 0$$

En conclusion, la région de stabilité absolue du schéma est $A = \{\lambda \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(\lambda) < 0\}$.
Le schéma est donc absolument stable.

Exercice 3 (**sur 6 points**)
On considère la méthode de Runge-Kutta donnée par le tableau de Butcher suivant

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & -1/6 & 4/3 & -1/6 \end{array} \tag{2}$$

1. Décrire les méthodes de quadrature utilisées à chaque étape.
2. Ecrire explicitement et en détail le schéma associé au tableau de Butcher (2).
3. Déterminer l'ordre de cette méthode.

Corrigé

1. Les points intermédiaires sont

$$t_{n,1} = t_n, t_{n,2} = t_n + \frac{h}{2} \text{ et}, t_{n,3} = t_n + h$$

La formule de quadrature de f sur $[0,1]$ associée aux poids b_i est:

$$\int_0^1 f(t)dt \approx -\frac{1}{6}f(0) + \frac{4}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6}f(1)$$

Première étape, la formule de quadrature de f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt \approx \frac{1}{2}f(0)$$

Deuxième étape, la formule de quadrature de f sur $[0,1]$ est:

$$\int_0^1 f(t)dt \approx -f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right)$$

2.

$$\begin{aligned} y_{n,1} &= y_n \\ y_{n,2} &= y_n + \frac{h}{2}f\left(t_{n,1}, y_{n,1}\right) \\ y_{n,3} &= y_n - hf\left(t_{n,1}, y_{n,1}\right) + 2hf\left(t_{n,2}, y_{n,2}\right) \\ y_{n+1} &= y_n - \frac{1}{6}hf\left(t_{n,1}, y_{n,1}\right) + \frac{4}{3}hf\left(t_{n,2}, y_{n,2}\right) - \frac{1}{6}hf\left(t_{n,3}, y_{n,3}\right) \end{aligned}$$

La méthode proposée s'écrit:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 &= f(t_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}h\left(-k_1 + 8k_2 - k_3\right) \end{aligned}$$

3. **ordre** ≥ 1

$$\sum_{i=1}^{4} b_i = -\frac{1}{6} + \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = 1$$

ordre ≥ 2 de plus on doit avoir

$$\sum_{i=1}^{4} b_i c_i = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

ordre ≥ 3
Comme

$$\sum_{i=1}^{4} b_i c_i^2 = \frac{4}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{3}$$

alors la méthode est d'ordre 2.