Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques
Master 1: EDP et applications

Le 01/10/2020

Epreuve de Synthèse : Théorie spectrale des opérateurs

Exercice 1: Soit H un espace de Hilbert complexe et $T : D(T) \subset H \to H$ un opérateur linéaire symétrique tel que $\operatorname{Im}(T+I) = H$.

1./ Montrer que $D(T)$ est dense dans H.

2/ Montrer que T est auto-adjoint.

3/ On considère $H = L^2([0,1])$ et l'opérateur T défini par $Tu = -i\frac{du}{dx}$

1/ Déterminer le domaine de T.

2/ Montrer que T n'est pas un opérateur borné.

3/ Montrer que T est fermé. Sous quelles conditions l'opérateur T est symétrique.

Exercice 2: **I** / On désigne par E l'espace de Hilbert complexe $L^2([0,\pi])$, pour toute $f \in E$, on définit une fonction Tf sur $[0,\pi]$ par

$$\forall x \in [0,\pi], \ (Tf)(x) = \int_0^\pi \cos(x+t) \ f(t)\, dt$$

1/ Montrer que T est un opérateur compact sur E.

2/ Calculer le spectre T.

II/ On considère $E = L^2([0,1])$ et $T : E \to E$ défini par $Tf(x) = \int_0^x (x-t)\, f(t)\, dt$

1/ Montrer que $\|T\| < 1$ et que pour $n \geq 1, T^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(t)\, dt$

2/ Résoudre l'équation intégrale avec $g \in E$ donnée et $f \in E$ l'inconnu $f(x) = g(x) + \int_0^x (x-t)\, f(t)\, dt$

Exercice 3 Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et soit A l'opérateur de l^p $(1 \leq p < +\infty)$ défini par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (Au)(n) = \lambda_n u(n)$$

1/ Démontrer que A est continu si et seulement si la suite (λ_n) est bornée.

2/ Dans le cas où A est continu, calculer ses valeurs propres et son spectre.

3/ On considère maintenant l'opérateur:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (Au)(n) = u(n+1)$$

Déterminer le spectre de A pour $1 \leq p \leq +\infty$.

Corrigé : T.S.

0,5 pts

Ex 1 : $T : D(T) \subset H \to H$, T symétrique

$Im(T+I) = H$

1/ Mq $\overline{D(T)} = H$.

On montre que $D(T)^{\perp} = \{0\}$.

Soit $w \in D(T)^{\perp}$, par hyp $\exists z \in D(T)$ tq $Tz + z = w$, on a

1,5

$(w, u) = (Tz + z, u) \overset{T\,sym}{=} (z, Tu + u) = 0 \quad \forall u \in D(T)$.

i.e $z \in (Im(T+I))^{\perp}$ donc $z = 0 = w$.

2/ Pour montrer que T est auto-adj, il suffit de montrer que $D(T^*) \subset D(T)$. Comme T est sym par hyp alors $D(T) \subset D(T^*)$.

Soit $v \in D(T^*)$, Par hyp $\exists z \in D(T)$ tq $Tz + z = T^* v + v$

$\forall u \in D(T)$, $(v, Tu + u) = (T^* v + v, u)$

1,5

$= (Tz + z, u) = (Tz, u) + (z, u)$

$= (z, Tu) + (z, u) = (z, Tu + u)$.

il en résulte que $v = z$ et $v \in D(T)$.

3/ $Tu = -i \dfrac{du}{dx}$

1/ $D(T) = \{ u \in L^2([0,1]),\ \dfrac{du}{dx} \in L^2([0,1]) \} = H^1([0,1])$ 0,5

2/ T n'est pas borné $\iff \exists (u_n) \in H$ tq $\|u_n\| = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \|Tu_n\| = +\infty$ 1

On prend $u_n = e^{inx}$ $\quad \|e^{inx}\|_{L^2} = 1$.

$Tu_n = n e^{inx}$ $\quad \|Tu_n\|^2_{L^2} = \int |n e^{inx}|^2 dx = n^2 \int |e^{inx}|^2 dx$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \|Tu_n\|_{L^2} = +\infty$.

3/ T fermé : $\forall u_n \in D(T)$ tq $\left. \begin{array}{l} u_n \to u \\ Tu_n \to v \end{array} \right\}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} Tu_n = Tu = v$, $u \in D(T)$

On a $\left. \begin{array}{l} u_n \to u \\ Tu_n \to v \end{array} \right\} \Rightarrow u_n$ est une suite de Cauchy

ds $H^1([0,1])$ or $H^1([0,1])$ est un Banach (complet)
$\Rightarrow u \in H^1(0,1)$ et $v = -i\frac{du}{dx}$. Donc T est fermé.

Sous quelles conditions T est sym. 1

T est symt $\Leftrightarrow \forall u,v \in D(T)$ on a $\langle Tu,v\rangle = \langle u,Tv\rangle$.

$$\langle Tu,v\rangle = \int_0^1 -i\frac{du}{dx}\,\bar{v}$$

$$= -iu\bar{v}\Big|_0^1 + \int_0^1 u\,\overline{-i\frac{dv}{dx}} = \langle u,Tv\rangle$$

pour que T soit symétrique il faut avoir $u(0)=u(1)=0$.

Ex2 (08pts)

$E = L^2([0,\pi])$.

$\forall t \in [0,\pi],\ Tf(r) = \int_0^\pi \cos(r+s)\,f(s)\,ds$.

1/ Mq T est compact. On montre en premier que T est un op cont sur E.

$|Tf(r)|^2 = \left|\int_0^\pi \cos(t+s)\,f(s)\,ds\right|^2$ or $|\cos(r+s)| \leq 1$

$$\int_0^\pi |Tf(r)|^2 dr \leq \int_0^\pi \left|\int_0^\pi f(s)\,ds\right|^2 dr.$$

$$\|Tf(r)\|_{L^2} \leq \sqrt{\pi}\ \|f\|_{L^2}$$

T est cont sur E. 2

On remarque que:

$\cos(r+s) = \cos r\cos s - \sin r\sin s$.

$Tf(r) = \cos r\int_0^\pi \cos s\,f(s)\,ds - \sin r\int_0^\pi \sin s\,f(s)\,ds$.

l'image de T est engendrée par les 2 vecteurs propres $\cos t$ et $\sin t$ (qui sont ds $L^2([0,\pi])$) ainsi T est de rang $=2$.

T est borné et ~~de~~ de rang fini donc compact.

2/ T est cpt $\Rightarrow \sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$.

$\sigma_p(T) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

8° $f(t) = \cos t \Rightarrow T(\cos t) = \lambda_1 \cos t$

$T(\cos t) = \int_0^\pi \cos t \cos^2 s \, ds - \sin t \int_0^\pi \sin s \cos s \, ds$

$= \cos t \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos 2s}{2} \right) = \lambda_1 \cos t$

2,5

par conséquent $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}$.

si $f(t) = \sin t \Rightarrow T(\sin t) = \lambda_2 \sin t$

$T(\sin t) = \int_0^\pi \cos t \sin s \cos s \, ds - \sin t \int_0^\pi \sin^2 s \, ds$

$= - \sin t \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2s}{2} \, ds = \lambda_2 \sin t$.

par conséquent $\lambda_2 = -\frac{\pi}{2}$. ainsi $\sigma(T) = \{0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\}$.

II) $E = L^2([0,1])$ et $T : E \to E$

$Tf(x) = \int_0^x (x - t) f(t) \, dt$.

Mq $\|T\| < 1$

$\|Tf\|_2^2 = \int_0^1 |Tf(x)|^2 dx = \int_0^1 \left| \int_0^x (x-t) f(t) \, dt \right|^2 dx$

$\leq \int_0^1 \left| \int_0^x |x-t|^2 dt \int_0^x |f(t)|^2 dt \right) dx$ 1

$= \int_0^1 \left| \frac{x^3}{3} \int_0^x |f(t)|^2 dt \right| dx \leq \frac{1}{3} \|f\|_2^2$.

D'où $\|Tf\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \|f\|$ donc $\|T\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$

2/ Par récurrence sur $\mathbb{N}$

Pour $n = 1$, ok

Supposons que c'est vrai pour l'ordre n et montrons pour $n+1$.

$(T^{n+1} f)(x) = T(T^n f)(x) = \int_0^x (x-t)(T^n f)(t) \, dt$

$= \int_0^x (x-t) \left| \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(s) \, ds \right| dt$

$= \int_0^x f(s) \int_s^x (x-t) \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} \, dt \, ds$

$$= \int_0^x \frac{f(s)}{(2n-1)!} \left| \int_s^x (x-t)(t-s)^{2n-1} dt \right| ds$$

$$= \int_0^x \frac{f(s)}{(2n-1)!} \frac{(x-s)^{2n+1}}{2n(2n+1)} ds$$ 2pts

$$(T^{n+1} f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f(t) dt$$

2/ l'eq $f(x) = g(x) + \int_0^x (x-t) f(t) dt$.

$f(x) = g(x) + Tf(x)$.

$(I-T) f(x) = g(x)$

Comme $\|T\|<1$ alors $(I-T)$ est inversible et on a

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n\geq 0} T^n$$

$$f(x) = ((I-T)^{-1} g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (T^n g)(x)$$

$$= g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (T^n g)(x).$$ 1,5

$$= g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} g(t) dt$$

$$= g(x) + \int_0^x sh(x-t)\, g(t) dt.$$

Ex3 0,5 pts

si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M alors

$\forall u \in \ell^p$, $\|Au\|_p \leq M \|u\|_p$; 0,5

T est cont de norme majorée par M.

Réciproquement, Supp A est cont. Posons pour $m \in \mathbb{N}$

$u^m(n) = 1$ si $m=n$, $u^m(n) = 0$ sinon. Alors $u^m \in \ell^p$ et

$\forall m \in \mathbb{N}$, $\|Au^m\|_p = |\alpha_m| \leq \|A\| \|u^m\|_p = \|A\|$.

donc la suite $(\alpha_n)_n$ est bornée par $\|A\|$. 0,5

On a $\|A\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|$.

2/ Supp A est cont et $M = \sup |\alpha_n|$.

si α est une v.p de A, il existe $u \neq 0$ tq

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_n u(n) = \alpha \cdot u(n)$.

Alors $\alpha = \lambda_n$, les $(\lambda_n)_n$ sont donc les seules v.p possibles pour $m \in \mathbb{N}$, le vecteur u^m défini ds la 1ère question est un vecteur propre associé à λ_m

ainsi $\sigma_p(A) = \{\lambda_n, \; n \in \mathbb{N}\}$.

Comme $\sigma(A)$ est un fermé et $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$

alors $\overline{\sigma_p(T)} \subset \sigma(T)$.

1 pts

Montrons l'inclusion inverse càd $\sigma(T) \subset \overline{\sigma_p(T)}$

Soit $\alpha \notin \overline{\sigma_p(T)}$ et $\delta = d(\alpha, \sigma_p(T)) > 0$

On définit l'a S sur ℓ^p par

$\forall u \in \ell^p, \; \forall n \in \mathbb{N} \; (Su)(n) = (\alpha - \lambda_n)^{-1} u(n)$.

On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad |Su(n)| \leq \delta^{-1} |u(n)|$

S est bien défini et cont sur ℓ^p ds lui même

On a $\|S\| < \frac{1}{\delta}$

De plus $(\alpha I - T) S = S(\alpha I - T) = I$

donc S est l'inverse de $(\alpha I - T)$ càd $\alpha \in \rho(T)$.

par conséquent $\alpha \notin \sigma(T)$.

Alors $\sigma(T) = \overline{\sigma_p(T)}$

2/ $\forall n \in \mathbb{N} \quad (Au)(n) = u(n+1) \qquad 1 \leq p \leq \infty. \quad E = \ell^p$

On détermine le spectre ponctuel de A.

$Au(n) = \lambda u(n) = u(n+1)$

$u(1) = \lambda u(0), \; u(2) = \lambda u(1) = \lambda^2 u(0) \ldots$

2 pts

par recurrence on arrive à

$u(n) = \lambda u(n-1) = \lambda^n u(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

il faut que $u(n) \in \ell^p$. Pour cela on pose

$u = u(n)_{n \in \mathbb{N}}$ càd $u = u(0)(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^n \ldots)$.

pour $1 \leq p < +\infty$, $u \in \ell^p$ si $|\lambda| < 1$.

pour $p = +\infty$

$\|u\|_\infty = \sup |u_0| (1, |\lambda|, \dots, |\lambda|^n \dots)$ donc

$u \in \ell^\infty$ si $|\lambda| \leq 1$.

Par conséquent

$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \text{ tq } |\lambda| < 1\}$ si $1 \leq p < +\infty$.

$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \text{ tq } |\lambda| \leq 1\}$ si $p = +\infty$.

On montre $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \text{ tq } |\lambda| \leq 1\}$.

2pts

On a déjà $\overline{\sigma_p(A)} \subset \sigma(A)$.

D'un autre coté on a $\|A\| = 1$.

On sait $\sigma(A) \subset B(0, \|A\|)$ alors

$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1\}$. càd $\sigma(A) \subset \overline{\sigma_p(A)}$

Ainsi $\sigma(A) = \overline{\sigma_p(A)} = \{\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1\}$.