Université de Tlemcen A.U.2019/2020
Département de Mathématiques 27/09/2020

Examen
de
Méthodes de résolution des problèmes elliptiques

Exercice1($10pts$)

Soient Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^2(\Omega)$.
On considère l'´equation

$$-\Delta u + \sin u = f \text{ dans } \Omega,\ u \in H_0^1(\Omega) \tag{E}$$

1. Vérifier si $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$J(v) := \int_\Omega \Big(|\nabla v(x)|^2 - \cos(v(x)) - f(x)\Big)\, dx$$

est la fonctionnelle d'énergie associée à (E)

2. Montrer que (E) possède au moins une solution faible.

3. On considère maintenant l'équation

$$-\Delta u + \lambda \sin u = f \text{ dans } \Omega, u \in H_0^1(\Omega) \tag{E$_\lambda$}$$

Montrer que pour $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$, deux solutions de (E_λ) on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \Big(|\nabla(u_1-u_2)|^2 + \lambda(\sin(u_1) - \sin(u_2))(u_1-u_2)\Big)\, dx \\ &\geq (\alpha - C|\lambda|)\|u_1-u_2\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

où

$$\alpha = \inf_{v \in H_0^1(\Omega);\ v \neq 0} \frac{\|\nabla v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{L^2}^2}$$

et C est une constante à préciser.

4. En déduire que si $|\lambda| < \frac{\alpha}{C}$, alors l'équation (E_λ) admet une solution unique.

Exercice2($10pts$)

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$.Pour $p \geq 1$,on définit la fonctionnelle $\Phi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx$$

1. Vérifier que Φ est differentiable sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et

$$\begin{aligned} \langle \Phi'(u), v\rangle &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla v dx \\ &= -\langle \Delta_p u, v\rangle \end{aligned}$$

   où

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

2. On considère l'opérateur

$$A = -\Delta_p u + b\nabla u$$

   vérifier que A est bien défini de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$.

3. Montrer que A n'est pas la differentielle au sens de Gateaux d'une fonctionnelle.

4. Montrer que A est monotone.
   (ind: utiliser la convexité de la fonction t$\rightsquigarrow |t|^p$.)

5. Pour $f \in L^p(\Omega)$, expliquer comment on peut montrer l'existence de solution faible du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u + b\nabla u = f \\ u = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Université de Tlemcen
Département de Mathématiques A.U.2019/2020

Corrigé de l'Examen
de
Méthodes de résolution des problèmes elliptiques

Exercice1(10pts)

Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$.

On considère l' ´equation

$$-\Delta u + \sin u = f \text{ dans } \Omega,\ u \in H_0^1(\Omega) \qquad (E)$$

1. $\boxed{\text{2pts}}$ $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$J(v) := \int_\Omega \left(|\nabla v(x)|^2 - \cos(v(x)) - f(x) \right) dx$$

J est C^1et sa differentielle en u est donnée par:

$$J'(u)v := 2\int_\Omega \nabla v(x) \nabla u(x) + \sin(u(x))\, v(x)\, dx$$

Par la formule de Green , on obtient alors

$$J'(u)v = \int_\Omega [-2\Delta u(x) + \sin u(x)]\, v(x)\, dx$$

J n'est pas la fonctionnelle d'énérgie associée à (E) car un point critique de J n' est pas solution faible de (E).

2. $\boxed{\text{4pts}}$ Existence d'au moins une solution faible.de (E)
On montre son existence par approche variationnelle, on considère la fonctionnelle $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$,définie par

$$\Psi(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \cos(u) - f.u \right)(x)\, dx$$

et en utilisant $cos(u)$ borné par 1 et l'inégalité de Holder, on obtient

$$\Psi(u) \geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - mes(\Omega) - \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2}$$

et par l'inégalité de Poincaré on a l'existence d'une constante $C = C(\Omega) > 0$,

$$\Psi(u) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - mes(\Omega) - C\|f\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} > -\infty$$

de plus si l'on pose $X = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$,le polynome

$$\frac{1}{2}X^2 - C\|f\|_{L^2} X - mes(\Omega) \underset{X\to\infty}{\rightarrow} +\infty,$$

ce qui permet de déduire que Ψ est coercive sur $H_0^1(\Omega)$

$$\Psi(u) \underset{\|u\|\to\infty}{\rightarrow} +\infty$$

Montrons que $\Psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ est faiblement semi continue inferieurement. Pour une suite $(u_k)_{k\in N} \subset H_0^1(\Omega)$ telle que $u_k \rightharpoonup u \in H_0^1(\Omega)$, montrons que

$$\liminf_{k\to\infty} \Psi(u_k) \geq \Psi(u)$$

Tout d'abord, Ω étant borné on peut considérer

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

a) $(u_k)_k$ converge faiblement elle est donc bornée. Par l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$,de toute suite bornée de $H_0^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite qui converge (fortement) dans $L^2(\Omega)$. En particulier,on peut supposer, en passant à une sous-suite, que $u_k \to u$ fortement dans $L^2(\Omega)$ c.à.d

$$||u||_{L^2(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} ||u_k||_{L^2(\Omega)} = \liminf_{k\to\infty} ||u_k||_{L^2(\Omega)}$$

b)$H_0^1(\Omega)$ étant un Hilbert, par définition de la convergence faible on a pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\langle u, v\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle u_k, v\rangle \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Donc

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sup_{v\in H_0^1(\Omega), v\neq 0} \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|} \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|$$

c) Puisque $-\cos(u_k) \geq -1$, le lemme de Fatou donne

$$\liminf_{k\to\infty}\left(\int_\Omega -\cos(u_k)\,dx\right) \geq \left(\int_\Omega \liminf_{k\to\infty}(-\cos(u_k))\,dx\right)$$

De a), b), c) et $\liminf(A+B) \geq \liminf A + \liminf B$
on obtient

$$\liminf_{k\to\infty} \Psi\left(u_k\right) \geq \Psi\left(u\right)$$

Conclusion : $H_0^1\left(\Omega\right)$ sous-espace vectoriel fermé de $H^1\left(\Omega\right)$, est un convexe fermé. Φ est faiblement semi continue inferieurement minorée et coercive , elle admet un minimum sur $H_0^1\left(\Omega\right)$ et par suite il y a existence de solution faible pour (E) .
remarque il est possible de montrer cette existence par la théorie de point fixe.

3. $\boxed{\text{3pts}}$ Si $u_1, u_2 \in H_0^1\left(\Omega\right)$ sont solutions de (E_λ) on a

$$-\Delta(u_1-u_2)+\lambda(sin(u_1)-sin(u_2)) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

en multipliant cette équation par $u_1 - u_2$ et en en integrant sur Ω on obtient en utilisant la formule de Green,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega -\Delta(u_1-u_2)(u_1-u_2)dx + \int_\Omega (u_1-u_2)(sin(u_1)-sin(u_2))dx \\ &= \int_\Omega \Big(\left|\nabla(u_1-u_2)\right|^2 + (sin(u_1)-sin(u_2))(u_1-u_2)\Big)\,dx. \end{aligned}$$

Et en utilisant le théorème des accroissement finis pour la fonction sin . sur $[u_1\left(x\right), u_2\left(x\right)]$ (oubien$[u_2\left(x\right), u_1\left(x\right)]$),on a l'existence d'un θ, $u_1\left(x\right) < \theta\left(x\right) < u_2\left(x\right)$ p.p sur Ω

$$\begin{aligned} \int_\Omega (u_1-u_2)(sin(u_1)-sin(u_2))dx &= -\int_\Omega (u_1-u_2)^2\left(\frac{\sin u_1 - \sin u_2}{u_1-u_2}\right)(x)\,dx \\ &= \int_\Omega (u_1-u_2)^2 \cos\theta\left(x\right) dx \\ &\geq -\int_\Omega (u_1-u_2)^2 dx = -\left\|u_1-u_2\right\|^2 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \frac{\left|\nabla(u_1-u_2)\right|^2}{\left(u_1-u_2\right)^2}\left(u_1-u_2\right)^2 dx \\ \geq & \inf_{v\in H_0^1(\Omega);\ v\neq 0} \frac{\left\|\nabla v\right\|_{L^2}^2}{\left\|v\right\|_{L^2}^2} \int_\Omega \left(u_1-u_2\right)^2 dx \end{aligned}$$

Ce qui entraine que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \Big(\left|\nabla(u_1-u_2)\right|^2 + \lambda(sin(u_1)-sin(u_2))(u_1-u_2) \Big)\, dx \\ &\geq (\alpha - |\lambda|)\, \|u_1-u_2\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

4. $\boxed{\text{1pt}}$Si l'on suppose que (E_λ) admet deux solutions distinctes notées u_1, u_2 alors à partir de la question précédante si $|\lambda| < \alpha$, on arrive à une contradiction
$$0 > 0$$
Alors l'équation (E_λ) admet une solution unique si $|\lambda| < \alpha$.

Exercice2$(10pts)$

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 3$.Pour $p \geq 1$,on définit la fonctionnelle $\Phi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx$$

1. $\boxed{\text{3pts}}$ Φ est differentiable sur $W_0^{1,p}(\Omega)$
Φ est Gateau differentiable
la fonction t$\rightsquigarrow$ $\varphi'(t) := \frac{1}{p}|t|^p$,est C^1 et $\varphi'(t) = |t|^{p-2}\, t$, par conséquent pour presque tout $x \in \Omega$,et pour tout $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} = |\nabla u(x)|^{p-2}\, \nabla u(x)\, \nabla v(x)$$

ce qui entraine

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t} &\leq \left| \Big(|\nabla u + \theta \nabla v|^{p-2} (\nabla u + \theta \nabla v)\, \nabla v \Big) \right| \\ &\leq Cste \Big(|\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \Big) + |\nabla v|^p \in L^1(\Omega) \end{aligned}$$

$$\overset{\text{th.convergence dominée}}{\Longrightarrow} \lim_{t\to 0} \int_{\Omega} \tfrac{|\nabla u(x)+t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u . \nabla v dx$$

Φ est gateaux differentiable et

$$\langle \Phi'(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u . \nabla v dx$$

(On peut montrer que Φ' est continue en utilisant le th. de convergence dominée)

Et en utlisant l'integration par parties (formule1 de Green) et la definition de Δ_p on montre

$$\int\limits_{\Omega} -\Delta_p.vdx = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla vdx$$

2. $\boxed{\text{1pt}}$ Par définition de $-\Delta_p$ et ∇, l'opérateur

$$A = -\Delta_p u + b\nabla u$$

est bien défini de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)' = W^{-1,q}(\Omega)$.

3. $\boxed{\text{2pts}}$D'après question1, $-\Delta_p$ est la differentielle au sens de Gateaux de fonctionnelle Φ donc A n'est pas la differentielle au sens de Gateaux d'une fonctionnelle car $b\nabla u$ ne l'est pas. En effet s'il on suppose le contraire qu'il existe une fonctionnelle I,

$$I : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}, \text{ telle que } I'(u)v = \int\limits_{\Omega} (b\nabla u) vdx$$

alors en posant $\varphi(t) = I(t.u)$ on a,

$$\varphi'(t) = I'(t.u)u = \int\limits_{\Omega} (b\nabla u) udx = 0$$

ce qui implique $\varphi(0) = \varphi(1)$ donc

$$I(u) = I(0) = 0,$$

contradiction!

4. $\boxed{\text{2pts}}$A étant un opérateur differentiel linéaire, A est monotone si pour $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$; $\langle A(u-v), u-v\rangle \geq 0$
posons $w = u - v$,

$$\langle Aw, w\rangle = \langle -\Delta_p w, w\rangle + b\langle \nabla w, w\rangle$$

or, si $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$,la formule de Green (integration par parties)

$$\langle \nabla w, w\rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} wdx = 0$$

Donc,

$$\langle Aw, w\rangle = \langle -\Delta_p w, w\rangle$$

Montrons que $-\Delta_p$ est monotone
puisque la fonction $t \rightsquigarrow |t|^p$ est convexe, sa dérivée est croissante,donc

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, \left(|t|^{p-2} t - |s|^{p-2} s\right)(t-s) \geq 0 \tag{1}$$

utilisant la question 1 et(1) , on obtient:

$$\begin{aligned} & \langle -\Delta_p u - (-\Delta_p v), u - v\rangle \\ = & \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

5. $\boxed{\text{2pts}}$Pour $f \in L^p(\Omega)$, l'existence de solution faible du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u + b\nabla u = f \\ \quad u = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

ne peut être établie en minimisant une fonctionnelle d'après la question 3. On peut utiliser la théorie d'opérateurs monotones en appliquant le théorème de Minty -Brouder, établissant la surjection de l'opérateur A. $W_0^{1,p}(\Omega)$ étant un Banach reflexif séparable, on doit montrer que A est borné, hemicontinu et coercif.

+$\boxed{\text{2pts}}$ pour ceux qui établissent ces propriétés.