Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2019/2020.
Septembre 2020.
*Eléments finis. ( Master1-EDP_S2)*

# Examen final

(durée : 01 h 30 mn)

Exo_CC **[07 pts]**

1) K étant un compact connexe et d'intérieur non vide de $\mathbf{R}^n$, P un espace fonctionnel de fonctions définies sur K à valeurs réelles et $\Sigma$ un sous-ensemble fini de points distincts de K, quant est-ce que le triplet (K, P, $\Sigma$ ) est dit élément fini de Lagrange ? Expliquer la réponse donnée. **(1pt)**

2) (K, P, $\Sigma$ ) est un élément fini de Lagrange et P est donc l'espace fonctionnel t.q. dim P = Card ( $\Sigma$ ) = N. Soit $\{p_i\}_{i=1}^N$ une base de l'espace P. Quant est-ce que cette base est dite base de fonctions de forme ? **(1pt)**

3) On considère une bijection F de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. Soit ($\overline{K}$, $\overline{P}$, $\overline{\Sigma}$ ) un éléments fini de Lagrange ($\overline{K}$ compact connexe t.q. $\overline{K}^o$ non vide, $\overline{P}$ esp. vect. de fonctions $\overline{p} : \overline{K} \to \mathbf{R}$, dim $\overline{P}$ = Card ( $\overline{\Sigma}$ ) = N où $\overline{\Sigma} = \{\overline{a}_j\}_{j=1}^N$ est $\overline{P}$-unisolvant). Alors on montre que le triplet (K, P, $\Sigma$ ), où K = F($\overline{K}$), P = $\left\{p : K \to R; \exists \overline{p} \in \overline{P} / \overline{p} = p \circ F\right\}$

$= \left\{p : K \to R; \exists \overline{p} \in \overline{P} / p = \overline{p} \circ F^{-1}\right\}$ et où $\Sigma = F(\overline{\Sigma})$, est aussi un élément fini de Lagrange.

Pour cela, on montre que $\Sigma$ est P-unisolvant en explicitant la base de fonctions de forme $\{p_i\}_{i=1}^N$ de P à partir de la base de fonctions de forme de $\overline{P}$ via la bijection F :

**3a)** Montrer que Card ( $\Sigma$ ) = Card ( $\overline{\Sigma}$ ). **(1pt)**

**3b)** On note par $\{\overline{p}_i\}_{i=1}^N$ la base de fonctions de forme de $\overline{P}$ ( $\overline{p}_i(\overline{a}_j) = \delta_{ij}$ $1 \le i, j \le N$= Card ( $\overline{\Sigma}$ ) ).

**3b1)** Ecrire alors les fonctions $p_i$ (i=1,…,N) de P en fonction des fonctions de forme de $\overline{P}$ et F. **(1pt)**

**3b2)** Vérifier que $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ $1 \le i,j \le N$ où $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^N$. **(1pt)**

**3b3)** Vérifier aussi que les fonctions $p_i$ (i = 1,…,N) forment un système libre de fonctions linéairement indépendantes. **(1pt)**

**3b4)** En déduire que dim P = Card( $\Sigma$ ) = dim $\overline{P}$. **(1pt)**

Exo_EF **[13 pts]**

1) Dans $\mathbf{R}^2$, soient ($\overline{K}$, $\overline{P}$, $\overline{\Sigma}$ ) et (K, P, $\Sigma$ ) deux éléments finis de Lagrange affine-équivalents avec $\overline{K}$ et K deux parties compactes disjointes de $R^2$. On suppose que les fonctions de forme de $\overline{P}$ sont affines (polynômes du premier degré). Alors

**1a)** Montrer que les fonctions de forme de P sont aussi affines. **(2pts)**

**1b)** En déduire que toute fonction de P est, au plus, affine (polynôme de degré $\le$ 1). **(1pt)**

2) Dans $\mathbf{R}^n$, étant donnés n+1 points $a_j$ ( j = 1,…,n+1), sous quelles conditions ces points peuvent-ils représenter les sommets d'un n-simplexe K ? **(1pt)**

3) Etant donné un n-simplexe K de sommets $a_j$ ( j = 1,…,n+1) de $\mathbf{R}^n$,

**3a)** Montrer que tout point x de $\mathbf{R}^n$ peut s'écrire comme combinaison affine des n+1 sommets $a_j$ de K moyennant ses coordonnées barycentriques $\lambda_j(x)$ ( j = 1,…,n+1). **(1pt)**

*Rappel* : Pour tout x de $\mathbf{R}^n$, les coordonnées barycentriques $\lambda_j(x)$ de x par rapport aux n+1 sommets $a_j$ de K sont définis comme suit : $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) a_{ij} = x_i$ $(1 \le i \le n)$ et $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1$ avec $x_i$ ( i=1,…,n ) coordonnées cartésiennes de x par rapport à la base canonique (repère orthonormé) de $\mathbf{R}^n$.

**3b)** A partir des coordonnées barycentriques de x $\in \mathbf{R}^n$, comment peut-on vérifier que x $\in$ K ? **(1pt)**

**3c**) On introduit le treillis principal $\Sigma_k = \left\{ x \in R^n / \lambda_j(x) \in \left\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}, 1\right\} \text{pour } j = 1, \ldots, n+1 \right\}$ $(k \in N^*)$.

Montrer alors que $\Sigma_k \subset K$ et que $\forall x \in \Sigma_k$ $x = a_m = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n+1} m_j a_j$ où $m_j \in \{0,1,2,\ldots,k\}$ $\forall j = 1,\ldots,n+1$

Vérifier aussi que $\sum_{j=1}^{n+1} m_j = k$. **(1.5pts)**

4) (K, P, $\Sigma$ ) étant un élément fini de Lagrange, sous quelles conditions est-il appelé élément fini n_simplexe de type (k) ? On l'écrit alors comme suit : (K, $P_k$ , $\Sigma_k$ ). **(1.5pts)**

5) Dans $\mathbf{R}^n$ , K étant un n-simplexe de sommets $a_j$ (j = 1,…,n+1), montrer que les coordonnées barycentriques $\lambda_i$ ( i = 1,…,n+1) de tout point x de $\mathbf{R}^n$ sont des fonctions affines de x. c'est-à-dire que l'on peut écrire :
$\forall i = 1,\ldots,n+1 \quad \lambda_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

$$x \to \lambda_i(x) = \lambda_i(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j + b_{i,n+1} \qquad \textbf{(1.5pts)}$$

Rappel: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, les coordonnées barycentriques $\lambda_j(x)$ $(j=1,\ldots,n+1)$ de $x$ par rapport aux sommets $a_j$ de K sont définies comme suit :

$$A_n \begin{bmatrix} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ \lambda_n(x) \\ \lambda_{n+1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

coordonnées cartésiennes de $x = (x_1,\ldots,x_n)^T$ avec $A_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n,2} & & a_{n,n+1} \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}$

où $a_j = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix}$ $\forall j = 1,\ldots,n+1$

$A_n$ inversible.

6) Dans $\mathbf{R}^3$ (n=3), expliciter le treillis principal d'ordre 1 : $\Sigma_1$ (k=1) en déterminant tous ses points. Vérifier ensuite que dim $P_1$ = Card( $\Sigma_1$) où $P_1$ est, dans ce cas, l'espace des polynômes à trois variables de degré inférieur ou égal à 1. **(2.5pts)**

# Corrigé de l'examen final

Corrigé de l'exo_CC [07pts]

1) $(K, P, \Sigma)$ est un élément fini de Lagrange si $\Sigma$ est $P$-unisolvant c.à.d. (0.5pt)
$\forall \{\alpha_i\}_{i=1}^{Card(\Sigma)} \subset \mathbb{R}\ \exists! p \in P / p(a_i) = \alpha_i\ i = 1, \dots, Card(\Sigma)$ où $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^{Card(\Sigma)}$ (0.5pt)

2) $\{p_i\}_{i=1}^{N}$ base de l'espace fonctionnel $P$ ds l'élément fini $(K, P, \Sigma)$ où $N = Card(\Sigma)$
Une telle base est dite base de fonctions de forme ~~de~~ $P$ si la condition svte est vérifiée : $p_i(a_j) = \delta_{i,j}\ \forall i, j = 1, \dots, N = Card(\Sigma)$ avec $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^{N}$. (1pt)

3) $(\overline{K}, \overline{P}, \overline{\Sigma})$ élément fini de Lagrange. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijection t.q. $K = F(\overline{K})$, $P = \{p : K \to \mathbb{R} ; \exists \overline{p} \in \overline{P} / p = \overline{p} \circ F^{-1}\}$ et t.q. $\Sigma = F(\overline{\Sigma})$. Alors :

3a) $\overline{\Sigma} = \{\overline{a}_j\}_{j=1}^{N = Card(\overline{\Sigma})}$ et $\Sigma = F(\overline{\Sigma}) = \{F(\overline{a}_j)\}_{j=1}^{N} \Rightarrow Card(\Sigma) = N = Card(\overline{\Sigma})$. (1pt)

3b) $\{\overline{p}_i\}_{i=1}^{N}$ base de fctions de forme de $\overline{P} \Rightarrow \overline{p}_i(\overline{a}_j) = \delta_{i,j}\ 1 \le i, j \le N = Card(\Sigma)$.

3b1) $\forall p \in P\ \exists \overline{p} \in \overline{P} / p = \overline{p} \circ F^{-1} \Rightarrow$ On pose $p_i = \overline{p}_i \circ F^{-1}\ \forall i = 1, \dots, N$ et donc $\forall i = 1, \dots, N\ p_i \in P$ et $p_i = \overline{p}_i \circ F^{-1}$ pour $i = 1, \dots, N = Card(\Sigma)$ (1pt)

3b2) Si on note par $a_j\ (j = \overline{1, N})$ les pts de $\Sigma = \{F(\overline{a}_j)\}_{j=1}^{N} \Rightarrow a_j = F(\overline{a}_j)$
$\Rightarrow p_i(a_j) = \overline{p}_i \circ F^{-1}(F(\overline{a}_j)) = \overline{p}_i\left(F^{-1}(F(\overline{a}_j))\right) = \overline{p}_i(\overline{a}_j) = \delta_{i,j}$ pour $j = \overline{1, N}$.
car $\{\overline{p}_i\}_{i=1}^{N}$ base de fctions de forme de $\overline{P}$ (0.5) pour $i, j = 1, \dots, N$. (0.5)

3b3) $\sum_{i=1}^{N} \beta_i p_i = 0_P \Rightarrow \forall x \in K\ \sum_{i=1}^{N} \beta_i p_i(x) = 0$. $\forall j = \overline{1, N}\ a_j \in \Sigma \subset K$ et donc si on remplace $x$ par $a_j \in K\ (j = 1, \dots, N)$ on aura $\forall j = \overline{1, N}\ \sum_{i=1}^{N} \beta_i p_i(a_j) = 0$ or $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ (Voir 3b2)) ce qui permet d'écrire $\sum_{i=1}^{N} \beta_i \delta_{i,j} = 0\ \forall j = \overline{1, N} \Rightarrow \beta_j \delta_{j,j} = 0\ \forall j = \overline{1, N}$
$\Rightarrow \beta_j = 0\ \forall j = 1, \dots, N$ car $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = \delta_{j,j} = 1\ (i = j)$ (1pt)
On a donc montrer l'implication svte $\sum_{i=1}^{N} \beta_i p_i = 0_P \Rightarrow \beta_i = 0\ \forall i = \overline{1, N} \Rightarrow$ les $p_i\ (i = \overline{1, N})$ sont lin. indépendantes.

3b4) $\dim P = N = Card(\Sigma)$ et $\dim \overline{P} = Card(\overline{\Sigma}) \xRightarrow{3a} \dim P = \dim \overline{P}$ (0.5pt)

Corrigé de l'exo EF [13pts] (0.5pt)

1) Ds $\mathbb{R}^2$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ affine inversible $\Leftrightarrow \exists$ une matrice inversible $A\ (2 \times 2)$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^2$ t.q. $F(x_1, x_2) = F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b$. De même pour $F^{-1}$ :
$F^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \longmapsto F^{-1}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} + b'$ où $A' = A^{-1}$ et $b' = -A^{-1}b$. En effet, si on

.../...

pose $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b$ alors $A^{-1}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = A^{-1}A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + A^{-1}b$

D'où l'écriture de $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en fction de $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} - A^{-1}b = A'\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + b'$

1a)

Si on note maintenant par $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ les deux variables réelles des fonctions de forme $\bar{p}_i$ $(i = 1, \ldots, \mathrm{Card}(\bar{\Sigma}))$ de $\bar{P}$ définies sur $\bar{K}$ à valeurs ds $\mathbb{R}$ et par $(x_1, x_2)$ les deux variables réelles des fctions de forme $p_i$ $(i = 1, \ldots, \mathrm{Card}(\Sigma))$ de $P$ définies sur $K$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors, d'après la question 3) de l'exo_CC

on a $p_i(x_1, x_2) = (\bar{p}_i \circ F^{-1})(x_1, x_2) = \bar{p}_i(F^{-1}(x_1, x_2)) = \bar{p}_i\left(A'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b'\right)$ $i = \overline{1, N}$ avec $N = \mathrm{Card}(\Sigma) = \mathrm{Card}(\bar{\Sigma})$

Posant $A' = \begin{bmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} \end{bmatrix}$ et $b' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b' = \begin{bmatrix} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + b'_1 \\ a'_{2,1}x_1 + a'_{2,2}x_2 + b'_2 \end{bmatrix}$ (0,5pr

Puisque $\forall i = \overline{1, N}$ $\bar{p}_i$ est une fction affine (polynôme de degré 1 ds $\mathbb{R}^2$) ds $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \bar{p}_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{\alpha}_i \bar{x}_1 + \bar{\beta}_i \bar{x}_2 + \bar{\gamma}_i$ pour $i = \overline{1, N}$ avec $\bar{\alpha}_i$, $\bar{\beta}_i$ et $\bar{\gamma}_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1, N})$.

(0.5pr

$$\Rightarrow p_i(x_1, x_2) = \bar{p}_i(a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + b'_1,\ a'_{2,1}x_1 + a'_{2,2}x_2 + b'_2)$$

$$= \bar{\alpha}_i(a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + b'_1) + \bar{\beta}_i(a'_{2,1}x_1 + a'_{2,2}x_2 + b'_2) + \bar{\gamma}_i \quad (i = 1, \ldots, N)$$

(1pr

$$= \underbrace{(\bar{\alpha}_i a'_{1,1} + \bar{\beta}_i a'_{2,1})}_{\alpha_i} x_1 + \underbrace{(\bar{\alpha}_i a'_{1,2} + \bar{\beta}_i a'_{2,2})}_{\beta_i} x_2 + \underbrace{(\bar{\alpha}_i b'_1 + \bar{\beta}_i b'_2 + \bar{\gamma}_i)}_{\gamma_i}$$

$$= \alpha_i x_1 + \beta_i x_2 + \gamma_i \quad i = \overline{1, N}$$

$\Rightarrow \forall i = 1, \ldots, N$ $p_i$ est aussi une fction affine ds $\mathbb{R}^2$.

1b) Toute fonction de $P$ est une combinaison linéaire des fonctions de forme $p_i$ $(i = \overline{1, N})$ ~~equi~~ qui sont affines ds $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ toute fonction de $P$ est un polynôme de $\mathbb{R}^2$ (à 2 variables réelles) de degré $\leq 1$. (1pr

2) Dans $\mathbb{R}^n$, les $(n+1)$ pts $a_j$ $(j = 1, \ldots, n+1)$ représentent les sommets d'un n-simplexe $K$ s'ils ne sont pas situés sur un même hyperplan de $\mathbb{R}^n$ tous en même temps. Cela équivaut à vérifier que la matrice $A_n$ $((n+1)\times(n+1))$ est inversible où $A_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & a_{n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$ avec $a_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{i=1}^{n}$ $a_{i,j}$ est donc la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du pt $a_j$ pour $j = \overline{1, n+1}$. (1pr

3) $K$ n-simplexe de sommets $a_j$ $(j = 1, \ldots, n+1)$ de $\mathbb{R}^n$.

3a) $x \in \mathbb{R}^n$, à partir de la définition des coordonnées barycentriques de $x$ par rapport aux sommets $a_j = (a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{n,j})^T$ $(j = \overline{1, n+1})$ de $K$, on peut écrire :

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j}\lambda_j(x) = x_i \ (i = \overline{1, n}) \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_1^{n+1} a_{1,j}\lambda_j(x) = x_1 \\ \quad \vdots \\ \sum_1^{n+1} a_{n,j}\lambda_j(x) = x_n \end{cases} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) \overbrace{\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}}^{a_j} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$$ (0.5pr

$\Leftrightarrow x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) a_j$ et comme, de plus, $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1$ alors $x$ est exprimé comme combinaison affine des sommets $a_j$ $(j = 1, \ldots, n+1)$ de $K$. (0.5pr

3b) $x \in K \Leftrightarrow \forall j=\overline{1,n+1}\ \lambda_j(x) \in [0,1] \Leftrightarrow \forall_j = \overline{1,n+1}\ \lambda_j(x) \geq 0$ car $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1$ 1pt

3c) $\forall x \in \Sigma_k\ \lambda_j(x) \in \{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\}\ \forall_j = \overline{1,n+1} \Rightarrow \forall x \in \Sigma_k\ \lambda_j(x) \in [0,1]\ \forall_j = \overline{1,n+1}$
$\Rightarrow \forall x \in \Sigma_k\ x \in K \Rightarrow \Sigma_k \subset K$ (Voir question 3b)). 0.5pt
D'après 3a) $\forall x \in \Sigma_k\ x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) a_j = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{m_j}{k} a_j = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n+1} m_j a_j$ où $m_j \in \{0, 1, \dots, k\}$ 0.5pt
et comme $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1 = \sum_{j=1}^{n+1} (m_j/k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n+1} m_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n+1} m_j = k$ 0.5pt

4) $(K, P, \Sigma)$ est un élément fini de Lagrange n-simplexe de type $(k)$ si $K$ est un n-simplexe de $\mathbb{R}^n$ 0.5pt (de sommets $a_j$ $j=\overline{1,n+1}$), $P$ est l'espace 0.5pt des polynômes de $n$ variables $x_i$ $(i=\overline{1,n})$ de degré $\leq k$ et $\Sigma$ est le treillis principal d'ordre $k$ $(k \geq 1)$ introduit à la question 3c) 0.5pt

Dans ce cas on écrit $(K, P, \Sigma) = (K, P_k, \Sigma_k)$

Remarque : Si $k=0$ $P_0 = \mathbb{R}$ (espace des fonctions constantes sur $K \subset \mathbb{R}^n$ et $\Sigma_0 = \{a_0\}$ où $a_0$ est le barycentre de $K$ (le pt se trouvant à égale distance des sommets $a_j$ $(j=\overline{1,n+1})$ de $K$)

5) Il suffit, pour cela, de résoudre le syst. lin. (sous forme matricielle) permettant de définir les coords barycentriques $\lambda_i(x)$ $(i=\overline{1,n+1})$ en fonction des coords cartésiennes $x_j(x)$ $(j=\overline{1,n})$ :

$$A_n \begin{bmatrix} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ \lambda_{n+1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ \lambda_{n+1}(x) \end{bmatrix} = A_n^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} & b_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n+1,1} & \cdots & b_{n+1,n} & b_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix}$$ 1pt

$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n+1\ \lambda_i(x) = b_{i,1} x_1 + b_{i,2} x_2 + \dots + b_{i,n} x_n + b_{i,n+1}$ 0.5pt
c.à.d. $\lambda_i : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \lambda_i(x) = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} x_j + b_{i,n+1}$ pour $i = 1, \dots, n+1$.

6) Dans $\mathbb{R}^3$, le treillis principal d'ordre 1 est $\Sigma_1$ :
$\Sigma_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 ; \lambda_j(x) \in \{0,1\}$ pour $j = 1, \dots, 4\}$. On rappelle que le 3-simplexe est, ds ce cas, le tétraèdre non dégénéré de sommets $a_j$ $(j=\overline{1,4})$ :
$K = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)$ $\left(\text{dét}\, A_3 = \text{dét} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0\right)$
$\forall x \in K\ \exists \{\lambda_j(x)\}_{j=1}^{4} \subset [0,1] / x = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j(x) a_j$ et $\sum_{j=1}^{4} \lambda_j(x) = 1$ $(0 \leq \lambda_j(x) \leq 1\ \forall_j = \overline{1,4})$
$\Sigma_1 \subset K \Rightarrow \forall a \in \Sigma_1\ \exists \{\lambda_j(a)\}_{j=1}^{4} \subset \{0,1\} / a = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j(a) a_j$ avec $\sum_{j=1}^{4} \lambda_j(a) = 1$
Cela veut dire que lorsque $a \in \Sigma_1$, les coords barycentriques de $a$ ne peuvent prendre que les 2 valeurs possibles : 0 ou 1 en gardant à l'esprit que : $\lambda_1(a) + \lambda_2(a) + \lambda_3(a) + \lambda_4(a) = 1$. Voici donc toutes les possibilités des valeurs prises par les coordonnées barycentriques des pts de $\Sigma_1$ :

.../...

$1^{ère}$ possibilité : $\lambda_1(a) = 1$, $\lambda_2(a) = \lambda_3(a) = \lambda_4(a) = 0$

Donc $a = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j(a)\, a_j = \lambda_1(a) a_1 + \lambda_2(a) a_2 + \lambda_3(a) a_3 + \lambda_4(a) a_4 = 1.\, a_1 + \sum_{j=2}^{4} 0 a_j = a_1$ (0.5 pt)

$2^{ème}$ possibilité : $\lambda_1(a) = 0$, $\lambda_2(a) = 1$, $\lambda_3(a) = \lambda_4(a) = 0$

Donc $a = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j(a) a_j = \lambda_1(a) a_1 + \lambda_2(a) a_2 + \lambda_3(a) a_3 + \lambda_4(a) a_4 = 0.a_1 + 1.a_2 + 0.a_3 + 0.a_4 = a_2$ (0.5 pt)

$3^{ème}$ possibilité : $\lambda_1(a) = 0 = \lambda_2(a)$, $\lambda_3(a) = 1$ et $\lambda_4(a) = 0$

Donc $a = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j(a) a_j = \lambda_1(a) a_1 + \lambda_2(a) a_2 + \lambda_3(a) a_3 + \lambda_4(a) a_4 = 0.a_1 + 0.a_2 + 1.a_3 + 0 a_4 = a_3$ (0.5 pt)

$4^{ème}$ possibilité : $\lambda_1(a) = \lambda_2(a) = \lambda_3(a) = 0$ et $\lambda_4(a) = 1$

Donc $a = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j(a) a_j = \sum_{j=1}^{3} 0.a_j + 1.a_4 = a_4$ (0.5 pt)

Conclusion : $\Sigma_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. c'est à dire que ds $\mathbb{R}^3$, le treillis principal d'ordre 1 ne renferme que les sommets du 3-simplexe K.

$P_1 = \{ p : (x_1, x_2, x_3) \longmapsto p(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta \,;\ \alpha, \beta, \gamma \text{ et } \delta \in \mathbb{R} \}$

La base canonique de $P_1$ est (ds $\mathbb{R}^3$) : $\mathcal{B}_{P_1} = \{1, x_1, x_2, x_3\}$

$\dim P_1 = \mathrm{Card}(\mathcal{B}_{P_1}) = 4 = \mathrm{Card}(\Sigma_1)$. $\left( = \frac{(3+1)!}{1!\,3!} = \frac{4!}{3!} = \frac{1\times2\times3\times4}{1\times2\times3} = 4 \right)$

(0.5 pt)