Université Aboubekr BELKAID-Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
A.U : 2019-2020.

Epreuve Finale : *Analyse Fonctionnelle 2* - Master 1 E.D.P.
Mercredi 30/09/2020 - Durée : 1.5 h.

Exercice 1 :

Soient I un intervalle borné de $\mathbb{R}$, $1 < p < +\infty$ et $f \in L^\infty(I)$. On considère le problème *(P)*

$$\begin{cases} -u'' + |u|^{p-1}u = f & \text{dans } I \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

1) Donner le sens très faible (distributionnelle) de solution de *(P)* ?

2) Donner la formulation variationnelle et la fonctionnelle d'énergie $J(\cdot)$ associée à *(P)* ? Expliquez brièvement pourquoi elle est bien définie ?

3) Montrer que $J(\cdot)$ est minorée ?

4) Montrer que $J(\cdot)$ admet un minimum ?

5) Déduire que (P) admet une solution ?

6) Montrer que la solution variationnelle de *(P)* est unique ?

Exercice 2 :

I. On considère $p \in [1, +\infty[$, $N \geq 2$ fixés. Étant donné l'inégalité de type Hardy-Sobolev suivante :

$$(\exists C > 0)\ (\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N))\ \| |x|^\alpha u \|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

1) Trouver la relation vérifiée par α, q et p ? (argument d'homogeneité)

II. On fixe maintenant $1 \leq p < N$ et $\alpha = 0$.

2) Donner l'exposant q dans ce cas ? comment appelle-t-on cette inégalité ?

3) Admettons qu'on a effectué un raisonnement par densité, donnez l'inégalité obtenue en terme d'un espace de Sobolev.

On considère Ω un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^N$.

4) Donner les propriétés de l'opérateur prolongement ?

5) Utilisez ces propriétés pour déduire l'inégalité dans $W^{1,p}(\Omega)$?

6) Donner deux théorèmes de densités dans $W^{1,p}(\Omega)$?

Bonne chance.
Y.O.BOUKARABILA

S. Ex. 1:

1) $u \in L^p(I)$ et $\forall \varphi \in C_0^\infty(I)$

$$\int_I u(-\varphi'') + \int_I |u|^{p-1} u \varphi - \int_I f \varphi = 0.$$ (1)

2) La formulation variationnelle associée à (P) est:

$$(\forall \xi \in H_0^1(I)) \quad \int_I u'\xi' + \int_I |u|^{p-1} u \xi - \int_I f \xi = 0.$$ (0.5)

La fonctionnelle d'énergie

$$J : H_0^1(I) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto J(u) = \frac{1}{2}\int_I |u'|^2 + \frac{1}{p+1}\int_I |u|^{p+1} - \int_I fu.$$ (0.5)

Notons que $\|u\|_{H_0^1(I)} = \|u'\|_{L^2(I)} \left(\equiv \|u'\|_{L^2(I)} + \|u\|_{L^2(I)} \right.$ par "≤" de Poincaré $\left.\right)$

$$\left|\int_I fu\right| \leq \|f\|_{L^2(I)} \|u\|_{L^2(I)} \leq c\|f\|_{L^2(I)} \|u'\|_{L^2(I)} < +\infty$$ ("≤" Hölder) (0.5)

On a $H_0^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I) \cap C(\bar{I})$ et puisque I est borné alors $u \in L^q(I)$ $\forall q \in [1, +\infty[$ d'où $\int_I |u|^{p+1} < +\infty$. (0.5)

3) Soit $u \in H_0^1(I)$, on a:

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(I)} - \int_I fu$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(I)} - c\|u\|_{H_0^1(I)} \sim (\star)$$

Si $X = \|u\|_{H_0^1(I)}$ alors on a $(\forall u \in H_0^1(I))$ $J(u) \geq \frac{1}{2}X^2 - cX$

La fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $X \longmapsto \frac{1}{2}X^2 - cX$ est continue de plus $\lim_{X \to +\infty} f(X) = +\infty$ donc f est minorée, par conséquent $J(\cdot)$ est minorée. Soit $m = \inf_{u \in H_0^1(I)} J(u)$. (1.5)

4) Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(I)$ tel que $J(u_n) \longrightarrow m$.

Si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admet une s. suite (notée encore (u_n)) tel que $\|u_n\|_{H_0^1(I)} \longrightarrow +\infty$ alors par (✱) on conclut que $m = +\infty$, ce qui impossible. Ainsi, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

0.5

Puisque $H_0^1(I)$ est reflexif alors il existe une s. suite (on la note aussi par $\{u_n\}$) et $u \in H_0^1(I)$ tel que $u_n \longrightarrow u$ dans $H_0^1(I)$

0.5

en particulier $\boxed{\|u\|_{H_0^1(I)} \leq \underline{\lim} \|u_n\|_{H_0^1(I)}}$.

Par l'injection compacte de $H_0^1(I)$ dans $L^q(I)$ $(\forall q \in [1, +\infty[)$ on déduit que $\{u_n\}_n$ converge fortement vers u dans $L^{p+1}(I)$.

0.5

Ainsi,

$$\frac{1}{2}\int_I |u'|^2 \leq \frac{1}{2} \underline{\lim} \int |u_n'|^2$$

$$\int |u_n|^{p+1} \longrightarrow \int |u|^{p+1} \quad \text{et} \quad \int_I f u_n \longrightarrow \int_I f u$$

Donc, $J(u) \leq \underline{\lim}\, J(u_n) = m$. Or, $m \leq J(u)$

0.5

Par conséquent u est un minimum de $J(.)$

5) Puisque $J(.)$ est de classe C^1 et u est un minimum globale de $J(.)$ on conclut que $DJ(u) = 0$ i.e. u est une solution faible de (P)

1.5

(6) Si $u, v \in H_0^1(I)$ sont deux solutions de (P) alors

$$\begin{cases} -(u-v)'' + \left[|u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v\right] = 0 & I \\ (u-v) = 0 & \text{en } a \text{ et } b \end{cases}$$

Utilisons $(u-v)$ comme fct test, on déduit

2

$$\int_I |(u-v)'|^2 + \int_I (|u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v)(u-v) = 0$$

N, vérifie que $\forall a, b \in \mathbb{R}$) $(|a|^{p-1}a - |b|^{p-1}b)(a-b) \geq 0$ donc

$\|u-v\|_{H^1(I)} = 0$ d'où $u = v$.

5. Ex. 2 :

I) Soit $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$. L'inégalité est ainsi vérifiée pour u_λ pour tout $\lambda > 0$.

$u_\lambda(x) = u(\lambda x)$

$$\nabla u_\lambda(x) = \nabla[u(\lambda x)] = \lambda \nabla u(\lambda x)$$

$$(\forall \lambda > 0)\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha q} |u_\lambda(x)|^q dx \leq C^q \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda(x)|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}$$

On pose $y = \lambda x$ alors $dx = \lambda^{-N} dy$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{y}{\lambda}\right|^{\alpha q} |u(y)|^q \lambda^{-N} dy \leq C^q \left(\int_{\mathbb{R}^N} \lambda^p |\nabla u(\lambda x)|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\lambda^{-\alpha q - N} \int_{\mathbb{R}^N} |y|^{\alpha q} |u(y)|^q dy \leq C^q \lambda^q \left(\int_{\mathbb{R}^N} \lambda^{-N} |\nabla u(y)|^p dy\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\lambda^{-(\alpha+1)q - N + N\frac{q}{p}} \||y|^\alpha u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C^q \|\nabla u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

Cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $\lambda > 0$ donc

$-(\alpha+1)q - N + N\frac{q}{p} = 0$ d'où $\boxed{\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{(\alpha+1)}{N}}$

II) 2) → Soit vous remplacez dans la relation trouvée en Q.1) et trouver que $q = p^*$.

→ Soit vous réécrivez l'inégalité pour $\alpha = 0$

$(\exists C>0)\ (\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n))\ \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

et remarquez que c'est l'inégalité de Sobolev donc (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) nom complet

$q = p^*$.

1.5

3) L'inégalité obtenue est :

$(\exists C>0)\ (\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n))\ \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

(Notez que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$)

1.5

(Notez que les 3 propriétés...) :

4) Question de cours (cherchez les 3 propriétés...)

$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ linéaire tel que :

i) $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)\quad Pu_{|\Omega} = u$

ii) $(\exists C>0)\ (\forall u \in W^{1,p}(\Omega))\ \|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^p(\Omega)}$

iii) $(\exists C>0)\ (\forall u \in W^{1,p}(\Omega))\ \|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

1.5

5) Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ alors on a : (iii)

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Par l'inégalité de Sobolev on a :

$$\|Pu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Or, $\|Pu\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|Pu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ (iii)

c.q.f.d

c.à.d $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

2

(02/10/2020

6)

Thm 1: $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ restreint à Ω forme un sous espace dense de $W^{1,p}(\Omega)$.

1.5

Thm 2: (Serrin - Meyers)

$C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Fin $\square$

Barème:

Ex 1: 10 pts

Q.1) 1 Q.2) 2 Q.3) 1.5 Q.4) 2 Q.5) 1.5 Q.6) 2

Ex 2: 10 pts

Q.1) 2 Q.2) 1.5 Q.3) 1.5 Q.4) 1.5 Q.5) 2 Q.6) 1.5.