Université de Tlemcen, Département de Mathématiques, Examen de rattrapage, Module :Théorie de bifurcation.

Exercice1: (10 pts) Soit l'équation

$$\theta'' = \left(\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{R}\right) \sin\theta, \tag{S}$$

où ω est un paramètre réel.
Etudier la nature de bifurcation .

Solution:le système peut s'écrire (**02 pts)**

$$\begin{cases} \theta' = \eta \\ \eta' = \left(u^2 \cos\theta - \frac{g}{R}\right) \sin\theta \end{cases}$$

On remarque que $(0,0)$ est un point d'équilibre(01 pt) .La Jacobienne donne **(01 pt)**

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 - \frac{g}{R} & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$, alors les valeurs propres (**01 pts)** sont

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2}$$

et si $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$, alors les valeurs propres **(01 pts)** sont

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{g}{R}}$$

on en déduit que si $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$, le seul point d'équilibre est $(0,0)$, et on peut montrer qu'il est satble (**01 pts**).Si $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$, il y a naissance de 2 autres points d'équilibres **(02 pts)** $\left(\pm ar\cos\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{g}{R}}, 0\right)$.
Conclusion.Nous obtenons une bifurcation fourche **(02 pts)** .

Exercice2: (10 pts) Soit le système

$$x'(t) = f(x,\rho) \ \text{ dans } R^2$$

où ρ est un paramètre.
a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour produire une bifurcation de Hopf (03 pts) .

b) Donner la définition d'une bifurcation de hopf surcritique et sous critique.Expliquer par un schéma (02 pts) .
c) Existe il un autre type de bifurcation de Hopf (02 pts) ?
c) Donner un exemple d'une bifurcation de Hopf.Justifier votre réponse.(03 pts)

Solution: voirs le cours.