Université de Tlemcen, Département de Mathématiques, Master 1 biomaths,
Module: Théorie de bifurcation, Septembre 2020.

Examen et contrôle intégré. Durée 1h 30min

Exercice 1:(08 pts) Soit le système

$$\begin{cases} x' = xy + ax^3 + by^2x \\ y' = -y + cx^2 + dx^2y \end{cases}$$

Discuter la stabilité de $(0, 0)$ en effectuant une réduction du système sur la variété centre.

Exercice 2.(08 pts) a) Donner la forme normale d'une bifurcation fourche dans le cas scalaire.

b) Soit le système

$$x'(t) = f(x, \rho),$$

où ρ est un paramètre. On suppose que x^* est un point d'équilibre.

1) Donner une condition nécessaire sur la fonction f pour produire une bifurcation locale au voisinage de $\rho = \rho^*$.

2) Donner une condition suffisante pour avoir une bifurcation fourche. Donner le diagramme de bifurcation.

Exercice 4. (04 pts) Soit le système

$$\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = -2x + \mu y - x^2y - x^3 \end{cases}$$

Montrer que le système admet une bifurcation de Hopf au voisinage de $(0, 0)$.

NB. les points de l'exercice 2 seront comptabilisés comme note du contrôle continu.

Université de Tlemcen, Département de Mathématiques, Master 1 biomaths,
Module: Théorie de bifurcation, Septembre 2020.

Examen (corrigé)

Exercice 1:(08 pts) Soit le système

$$\begin{cases} x' = xy + ax^3 + by^2x \\ y' = -y + cx^2 + dx^2y \end{cases}$$

Discuter la stabilité de $(0, 0)$ en effectuant une réduction du système sur la variété centre.

Solution:La variété centre existe **(01 pt)** ,et elle est donnée par

$$\{(x, y) : y = h(x)\}$$

un calcul simple montre que

$$h(x) = cx^2 + O(x^4) \quad \textbf{(2 pts)}$$

La projection sur la variété centre donne le système réduit

$$u' = (a + c)u^3 + O(u^5) \quad \textbf{(1 pt)}$$

le point $(0, 0)$ est stable si $(a + c) < 0$ et instable si $(a + c) > 0$. **(1pt)**

Si $(a + c) = 0$, on pousse les calculs à l'ordre supérieur et on retrouve

$$h(x) = cx^2 + cdx^4 + O(x^6) \quad \textbf{(2pts)}$$

Si $cd + bc^2 > 0$, l'origine est instable et il est stable si $cd + bc^2 < 0$. (1pt)

Exercice 2.(08 pts) a) Donner la forme normale d'une bifurcation fourche dans le cas scalaire.

b) Soit le système

$$x'(t) = f(x, \rho),$$

où ρ est un paramètre. On suppose que x^* est un point d'équilibre.

b1) Donner une condition nécessaire sur la fonction f pour produire une bifurcation locale au voisinage de $\rho = \rho^*$.

b2) Donner une condition suffisante pour avoir une bifurcation fourche. Donner le diagramme de bifurcation.

Solution:

a) voir le cours **(02 pts)**

b1) pour produire une bifurcation il faut que $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, \rho^*) = 0$. **(02pts)**

b2) voir le cours **(03 pts +01 pt)**

Exercice4. (04 pts) Soit le système

$$\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = -2x + \mu y - x^2y - x^3 \end{cases}$$

Montrer que le système admet une bifurcation de Hopf au voisinage de $(0, 0)$.
solution:

La matrice jacobienne est **(01 pt)**

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \mu \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont **(01 pt)**

$$\frac{\mu}{2} \pm i \sqrt{\frac{\mu^2 - 8}{2}}$$

En $\mu = 0$, les valeurs propres sont purement imaginaires. La transversalité est vérifiée. **(02 pts)**

Master 1 : Biomathématiques et modélisation

Module : Théorie de bifurcation

Examen septembre 2020

nom	CC	EF		
BADAOUI SOUFIANE 11/01/1998	12.5	12		
BEKHTAOUI GHIZLENE 06/01/1998	11	15		
BENKHALED RADHWANE	07.5	10		
GUEZZEN CHERIFA 28/03/1999	10	14		
HAFFAF BADREDDINE OUSSAMA 05/04/1999	07.5	15		
KHELKHAL KHALED 20/09/1995	07.5	16.5		
MEDINI IMENE 26/06/1997	12.5	13		
MESLI ANES ABDELLAH 23/10/1996	17.5	14		
MOKHTAR ATIKA 05/06/1996	07.5	10		
OUKAID SARA 30/07/1996	12.5	16		
RABAH DOUNIA 03/07/1997	14	08		
SBIA MANEL 17/09/1997				
ZEBLAH SALAHEDDINE 06/03/1996	09	11.5		
Kessi Mohamed el amine 19/07/1998	13.5	16.5		